Kholles B MP 04/10/21

1 Questions de cours

Énoncer et démontrer le théorème de Rolles. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis

2 Exercices

1. Montrer que la fonction $f : [0; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{sin(x)} + x$$

   réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

2. Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(a) = 0 \text{ } et \text{ } f'(0) = 0$$

   (a) Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$

   (b) En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

3. On considère une fonction f continue sur $[a; +\infty[$ et dérivable sur $]a; +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

4. On considère la fonction définie par $f(x) = arctan(x)$.

   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_{n-1} \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1 - x^2)^n}$$

   (b) Préciser le dégré, la parité et le coefficient dominant de P_n ;

   (c) Déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $+\infty$ et $-\infty$ pour $n \neq 0$.

   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n sont réelles et disctintes.

5. Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} ((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$$

6. (BONUS) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ de classe C^2 telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x^2) = f(x)$.