Kholles : 15/10/20

Robin Loris

1 Exercices

1. Discuter de la diagonalisabilité des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ et \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2. On note $I = \int_0^\pi \frac{dt}{2+cos(t)}$ et on pose $u = tan(\frac{t}{2})$.
   Vérifier que $cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et en déduire la valeur de I par changement de variable $u = tan(\frac{t}{2})$.

3. On considère g l'application qui à toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + tr(M)J$ où J est une matrice non nulle de trace nulle.
   Montrer que $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de g. Est ce que g est diagonalisable ?

4. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'endomorphisme ϕ qui à $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ associe f'.

5. (Bonus) On considère une fonction positive et continue définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l \in]0;1[$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.