Kholles A MP 04/10/21

1 Questions de cours

Énoncer et démontrer la propriété sur la dérivée d'une fonction réciproque.

2 Exercices

1. Soit f une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, et f une fonction définie sur I un intervalle, de classe C^n s'annulant en $n+1$ points distincts de I.
   (a) Montrer que la dérivée n-ème de f s'annule au moins une fois sur I.
   (b) Soit α un réel; Montrer que la dérivée $(n-1)$-ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I. (On pourra considérer la fonction définie par $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$).
3. En calculant de 2 manières différentes la dérivée $n$ième de $x \mapsto x^n$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$
4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
   (a) Tracer la courbe représentative de f.
   (b) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n à coefficients réels tel que : $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.
   (d) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$.
5. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$
6. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Si f'' est bornée, que peut on dire de la limite de $f'(x)$ quand x tend vers l'infini. Et si f'' n'est pas bornée.
7. (BONUS) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ de classe C^2 telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x^2) = f(x)$.