Kholles ECS2 A : 05/10/21

Robin Loris

1 Exercices

1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

   (a) En trouvant les valeurs propres de A, discuter de la diagonalisabilité de A ?

   (b) Montrer que B est diagonalisable et déterminer D diagonale et P inversible telle que $B = PDP^{-1}$.

2. Montrer que $ln(t^2 + sin(t)) \underset{0}{\sim} 2ln(t)$
   Déterminer la nature de

$$\int_0^1 ln(t^2 + sin(t))\, dt$$

3. Notons : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) i. Calculer A^2 et A^3.
       ii. En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 comme unique valeur propre.
       iii. En déterminant une base de V_0 : est ce que A est diagonalisable ?

   (b) Pour tout a, on note $M(a) = I + 2aA + 2a^2A^2$ et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.
       i. Calculer pour tout couple de réels (a,b), le produit $M(a)M(b)$ et vérifier que celui-ci est dans E.
       ii. En déduire que $M(a)$ st inversible et déterminer son inverse.

   (c) On pose $a \neq 0$.
       i. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.
       ii. Calculer $(M(a) - I)^3$.
       iii. La matrice $M(a)$ est elle diagonalisable ?

4. Soit f une fonction continue définie sur $[0; +\infty[$ telle que f et f'' soient intégrables. Montrer que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $f.f'$ est intégrable.

5. (Bonus) On considère une fonction positive et continue définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = l \in]0;1[$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.