HEC ECS 1 : Fiche méthode espaces vectoriels

Les sous espaces vectoriels

La méthode : Soit F un ensemble.

1. On repère l'espace vectoriel E dans lequel F est inclus.
2. On vérifie que $0_E \in F$: pour cela, on commence par bien noter de quel nature est 0_E (vecteurs, polynômes, fonctions, matrices ...) ; puis on regarde sous quelle(s) condition(s) un élément de E appartient à F (équation à respecter, conditions sur les valeurs, le degré, la dérivée ... ?). Enfin, on vérifie que 0_F respecte ces conditions. Bien réaliser cette condition permet de mieux comprendre l'ensemble F souvent.
3. On pose $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F$ (on choisit des notations pertinentes qui permettent de bien comprendre la nature des objets : P, Q pour les polyômes, f, g pour les fonctions, u, v ou X, Y pour des vecteurs ....) et on note tout de suite ce que signifie $u, v \in F$.
   On vérifie ensuite que $u + \lambda v \in F$: pour cela on se rappelle ce que appartenir à F signifie, puis on le montre : souvent cela implique avant une réecriture de $u + \lambda v$. Par exemple, si $F \subset \mathbb{R}^n$ demande une condition sur les coordonnées alors il faut exprimer les coordonnées de $u + \lambda v$ en fonction de celle de u et v, pour pouvoir vérifier la condition (on utilisera alors le fait que u et v vérifient déjà ces conditions).

Remarque : si la condition 2 n'est pas respectée alors ce n'est pas un ev, et si on pense qu'il est impossible que la condition 3 soit respectée, on cherche alors un contre exemple : ATTENTION : trouver un contre exemple ne signifie pas trouver un $u \notin F$ mais trouver $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u + \lambda v \notin F$.

Les cas classiques : On apprendra à réaliser rapidement les cas suivant :

1. $F \subset \mathbb{R}^n$ avec "une équation linéaire sur les coordonnées $= 0$", exemple : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 2z = 0\}$.
2. $F \subset \mathbb{R}^n$ où les coordonnées des éléments de F s'écrivent comme des combinaisons linéaires, exemple : $F = \{(a - b, b - c + a, a + b + c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
3. $F \subset \mathbb{K}[X]$ où les polynômes de F doivent respectés une condition du type : $deg \leqslant n$, $P(a) = 0$, relation linéaire entre P et ses dérivées .... où plusieurs de ces conditions, exemple : $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] | P(1) - P'(2) = 0\}$.
4. $F \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ où les fonctions de F doivent respectés une condition du type :$f(a) = 0$, relation linéaire entre f et ses dérivées .... où plusieurs de ces conditions, exemple : $F = \{P \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f'' - f + f' = 0\}$.
5. D'autre exemple sur les matrices, suites etc...

Réalisons ces exemples :

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 2z = 0\}$
   (a) On remarque $F \subset \mathbb{R}^3$, on va donc montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$.
   (b) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ et $(0, 0, 0) \in F$ car $(0, 0, 0)$ respecte l'équation $2x - y + 2z = 0$: en effet $2 \times 0 - 0 + 2 \times 0 = 0$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u, v \in F$: on a donc $u = (x, y, z)$ avec $2x - y + 2z = 0$ et $v = (x', y', z')$ avec $2x' - y' + 2z' = 0$. On doit vérifier que $u + \lambda v \in F$ donc il faut exprimer les coordonnées de $u + \lambda v$ pour vérifier si elles respectent l'équation de F : $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') = (X, Y, Z)$.
On vérifie alors $2X - Y + 2Z = 0$: en effet :

$$2X - Y + 2Z = 2(x + \lambda x') - (y + \lambda y') + 2(z + \lambda z') = 2x - y + 2z + \lambda 2x' - \lambda y' + 2\lambda z' =$$

$$= 2x - y + 2z + \lambda(2x' - y' + 2z') = 0 + \lambda.0 = 0$$

car $2x - y + 2z = 0$ et $2x' - y' + 2z' = 0$ et donc $u + \lambda v \in F$ et ainsi F est un sev de $\mathbb{R}^3$

2. $F = \{(a - b, b - c + a, a + b + c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$
   (a) On remarque $F \subset \mathbb{R}^3$, on va donc montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$.
   (b) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ et $(0, 0, 0) \in F$ car $(0, 0, 0)$ s'écrit sous la forme $(a - b, b - c + a, a + b + c)$ en choisissant $a = b = c = 0$.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u, v \in F$: on a donc $u = (a - b, b - c + a, a + b + c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $v = (a' - b', b' - c' + a', a' + b' + c')$ avec $a', b', c' \in \mathbb{R}$.
   On doit vérifier que $u + \lambda v \in F$ donc il faut exprimer les coordonnées de $u + \lambda v$ pour vérifier si elles s'écrivent sous la forme $(A - B, B - C + A, A + B + C)$ avec $A, B, C \in \mathbb{R}$: $u + \lambda v = (a - b + \lambda(a' - b'), b - c + a + \lambda(b' - c' + a'), a + b + c + \lambda(a' + b' + c')) = (a + \lambda a' - (b + \lambda b'), b + \lambda b' - (c + \lambda c') + a + \lambda a', a + \lambda a' + b - \lambda b' + c + \lambda c') = (A - B, B - C + A, A + B + C)$ avec $A = a + \lambda a'$, $B = b + \lambda b'$ et $C = c + \lambda c'$.
   Ainsi $u + \lambda v \in F$ et ainsi F est un sev de $\mathbb{R}^3$
3. $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] | P(1) - P'(2) = 0\}$
   (a) On remarque $F \subset \mathbb{K}[X]$, on va donc montrer que F est un sev de $\mathbb{K}[X]$.
   (b) $0_{\mathbb{K}[X]}$ est le polynôme nul et $0_{\mathbb{K}[X]} \in F$ car $0_{\mathbb{K}[X]}$ est de degré inférieur ou égal à 4 et $0'_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et donc $0_{\mathbb{K}[X]}(1) - 0'_{\mathbb{K}[X]}(2) = 0 - 0 = 0$.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in F$: on a donc $P \in K_4[X]$ tel que $P(1) - P'(2) = 0$ et $Q \in K_4[X]$ tel que $Q(1) - Q'(2) = 0$. On doit vérifier que $P + \lambda Q \in F$ donc il faut vérifier que $P + \lambda Q$ est de degré inférieur ou égal à 4 (ce qui est vraie car $deg(P + \lambda Q) \leqslant max(deg(P), deg(\lambda Q)) \leqslant 4$) et que $(P + \lambda Q)(1) - (P + \lambda Q)'(2) = 0$
   Ceci est également vraie car $(P + \lambda Q)(1) - (P + \lambda Q)'(2) = P(1) + \lambda Q(1) - (P' + \lambda Q')(2) = P(1) + \lambda Q(1) - P'(2) - \lambda Q'(2) = P(1) - P'(2) + \lambda(Q(1) - Q'(2)) = 0 + \lambda.0 = 0$.
   Ainsi $P + \lambda Q \in F$ et ainsi F est un sev de $\mathbb{K}[X]$
4. $F = \{P \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f'' - f + f' = 0\}$

   (a) On remarque $F \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on va donc montrer que F est un sev de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (b) $0_{F(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est la fonction nulle et $0_{F(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F$ car $0''_{\mathbb{K}[X]} = 0'_{F(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et donc $0''_{\mathbb{K}[X]} - 0_{\mathbb{K}[X]} + 0'_{F(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{F(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in F$: on a donc $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $f'' - f + f' = 0$ et $g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $g'' - g + g' = 0$. On doit vérifier que $f + \lambda g \in F$ donc il faut vérifier que $f + \lambda g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ce qui est vraie trivialement $f + \lambda g$ est bien à valeur dans $\mathbb{R}$ (et définie sur $\mathbb{R}$) et que $(f + \lambda g)'' - (f + \lambda g) + (f + \lambda g)' = 0$
   Ceci est également vraie car $(f + \lambda g)'' - (f + \lambda g) + (f + \lambda g)' = f'' + \lambda g'' - f - \lambda g + f' + \lambda g' = (f'' - f + f') + \lambda(g'' - g + g') = 0$.
   Ainsi $f + \lambda g \in F$ et ainsi F est un sev de $\mathbb{K}[X]$
   On remarque que les identités voulues sont des identités de fonctions, on aurait très bien pû dire $f''(x) + f(x) - f'(x) = 0$ pour tout x.

Voici d'autre exemples non corrigés classiques pour s'entraîner (possibilité de me les envoyer par mél)

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C} | x+y-4z=0\}$
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | x+y=z+1\}$
3. $F = \{(a+b,c,a+b+c) | a,b,c \in \mathbb{R}\}$
4. $F = \{P \in K_3[X] | P(1)=P(2)\}$
5. $F = \{P \in K[X] | P'' = XP'\}$
6. $F = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\ continue | f(3)=f(2)\}$

Un exemple plus original

$F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) | AM = MA\}$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixé.

Trouver une famille génératrice

La méthode : Soit F un espace vectoriel.
Il s'agit de montrer que $F = Vect(\{e_1,...,e_n\})$ c'est à dire que la famille $\{e_1,...,e_n\}$ est génératrice c'est à dire que tout élément u de F s'écrit comme combinaison linéaire de $e_1,...,e_n$.
Pour cela, on choisit un élément **quelconque** u de F et on l'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire. Il est essentiel pour cela d'exprimer u sous forme explicite : donner ses coordonnées s'il s'git d'un vecteur ou d'une matrice, expliciter u_n en fonction de n si il s'agit d'une suite, écrire l'expression du polynôme à l'aide de ces coefficients s'il s'git d'un polynôme. Par exemple, si on arrive à obtenir que $u \in F$ si et seulement si $u = (2x+y,y,2x)$ alors on aura $u = (x,y,z) \in F$ si et seulement si $u = (2x+y,y,2x) = x(2,0,2)+y(1,1,0)$ et donc tout vecteur u de F s'écrira comme combinaison linéaire de $(2,0,2)$ et $y(1,1,0)$ et ainsi la famille $\{(2,0,2); y(1,1,0)\}$ est génératrice de F. Un autre exemple dans les polynômes : si on montre que $P = a+bX+cX^2+dX^3 \in F$ si et seulement si $P = a+cX^2+dX^3-aX^2+cX^3 = a(1+X^2)+c(X^2+X^3)+dX^3$ alors la famille $\{1+X^2, X^2+X^3, X^3\}$ sera génératrice de F.
On remarque qu'il est nécessaire d'exprimer u sous la forme $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$ où les e_i sont fixes et où les λ_i contiennent les "éléments variables". Par exemple dans $u = (2x+y,y,2x) = x(2,0,2)+y(1,1,0)$, $(2,0,2)$ et $(1,1,0)$ et dans E alors que x et y sont quelconques.
Pour cela, la méthode la plus commune consiste à trouver une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il appartienne à F de manière à pouvoir réecrire u explicitement. Voyons le sur les exemples. **Les cas classiques :**
On apprendra à réaliser rapidement les cas suivant :

1. $F \subset \mathbb{R}^n$ avec "une équation linéaire sur les coordonnées $=0$", exemple : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x-y+2z=0\}$.
2. $F \subset \mathbb{R}^n$ où les coordonnées des éléments de F s'écrivent comme des combinaisons linéaires, exemple : $F = \{(a-b, b-c+a, a+b+c) | a,b,c \in \mathbb{R}\}$.
3. $F \subset \mathbb{K}[X]$ où les polynômes de F sont de degrés assez petit et respectent une condition du type $P(a)=0$, relation linéaire entre P et ses dérivées .... où plusieurs de ces conditions, exemple : $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] | P(1) - P'(2) = 0\}$.
4. $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où les méthodes vues sur les suites permettent de trouver une expression générale de u_n en fonction de n, exemple : $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | u_{n+2} + u_n = 0\}$.
5. D'autre exemple sur les matrices, fonction etc...

Réalisons ces exemples :

1. $F = \{(a-b, b-c+a, a+b+c) | a,b,c \in \mathbb{R}\}$
   Alors $u \in F$ si et seulement si $u = (a-b, b-c+a, a+b+c)$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$ donc ssi $u = a(1,1,1) + b(-1,1,1) + c(0,-1,1)$ et ainsi $\{(1,1,1); (-1,1,1); (0,-1,1)\}$ est génératrice de F.

2. $F=\{P\in\mathbb{K}_3[X]|P(1)-P'(2)=0\}$
   Ainsi $P\in F$ ssi $P=a+bX+cX^2+dX^3$ et $P(1)-P'(2)=0$.
   On va donner une condition nécessaire et suffisante sur a,b,c,d,e pour que $P(1)-P'(2)=0$: comme $P'=b+2cX+3dX^2$ $P(1)-P'(2)=0\Leftrightarrow a+b+c+d-(b+4c+12d)=0\Leftrightarrow a=3c+11d$
   Ainsi $P=a+bX+cX^2+dX^3\in F$ ssi $P=3c+11d+bX+cX^2+dX^3=c(3+X^2)+bX+d(11+X^3)$ et donc la famille $\{3+X^2;X;11+X^3\}$ est généatrice de F.
3. $F=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|u_{n+2}+u_n=0\}$
   Ainsi $(u_n)\in F$ ssi $u_{n+2}+u_n=0$ pour tout n.
   On résout donc l'équation caractéristique de manière à pouvoir exprimer u_n en fonction de n.
   $r^2+1=0\Leftrightarrow r=+i=e^{i\pi/2}$ ou $r=e^{i3\pi/2}$
   Ainsi $u_n=\lambda cos(n\pi/2)+\beta sin(n\pi/2$ pour tout n et donc $(u_n)_n=\lambda(cos(n\pi/2)_n+\beta(sin(n\pi/2)_n$ et donc les suites $(cos(n\pi/2)_n$ et $(sin(n\pi/2)_n$ sont génératrices de F.

Voici d'autre exemples non corrigés classiques pour s'entraîner (possibilité de me les envoyer par mél)

1. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}|x+y-4z=0\}$
2. $F=\{(a+b,c,a+b+c)|a,b,c\in\mathbb{R}\}$
3. $F=\{P\in K_4[X]|P(1)=P(2)\}$
4. $F=\{P\in K_2[X]|P''=XP'\}$
5. $F=\{(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,|u_{n+1}=u_n+r\}$

Un exemple plus original $F=\{M\in M_3(\mathbb{R})|2M+^tM=0\}$.

Montrer qu'une famille est libre

La méthode Il est bien plus simple de montrer qu'une famille $B=\{e_1,...,e_n\}$ est libre que génératrice : il suffit de montrer que si $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n=0_E$ avec $\lambda_i\in\mathbb{K}$ alors $\lambda_1=...=\lambda_n=0$.
Il faut néanmoins être prudent sur le sens de $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n=0$ qui peut prendre différent sens en fonction de l'espace vectoriel de l'exercice.
Si $E=\mathbb{K}^n$ alors $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n=0_E$ est une égalité de vecteurs donc $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n=0_E$ ssi les n coordonnées de $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n$ sont nulles : il s'agit donc de résoudre un système.
Si $E=K[X]$ alors $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n=0_E$ est une égalité de polynômes donc $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n=0_E$ ssi les coefficients de $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n$ sont nuls : il s'agit donc d'identifier les coefficients de chaque monôme puis de résoudre un système sur ceux ci.
Si $E=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n=0_E$ est une égalité de fonctions donc $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n=0_E$ ssi $\lambda_1e_1(x)+...+\lambda_ne_n(x)=0$ pour tout x . Plusieurs méthodes sont donc possibles : on évalue en certain x pour obtenir un système d'équations. On peut également regarder les limites ou effectuer des manipulations algébriques.

Dans tous les cas, on évitera les phrases du type "$au+bv=0$ donc forcément $a=0=b$ car c'est la seule possibilité" sans démontration.

Pour finir, si la famille n'est pas libre alors on exhibe une combinaison linéaire valant 0 et on en déduit que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Un exemple est traité en dernier ci-dessous. **3 exemples :**

1. Montrons que $\{(1,1,0);(1,2,3);(0,2,-1)\}$ est libre.
   Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $a(1,1,0)+b(1,2,3)+c(0,2,-1)=0$ alors $(a+b,a+2b+2c,3b-c)=0$ et ainsi on a :
$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& 0\\ a+2b+2c &=& 0\\ 3b-c &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& 0\\ b+2c &=& 0\\ 3b-c &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& 0\\ b+2c &=& 0\\ -7c &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow a=b=c=0$$

Ainsi la famille est libre.

2. Montrons que la famille $B=\{2+X;3-X^2;X+2X^2\}$ est libre.
   Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $a(2+X)+b(3-X^2)+c(X+2X^2)=0$ On a donc :
   $$2a+aX+3b-bX^2+cX+2cX^2=0 \Leftrightarrow 2a+3b+X(a+c)+X^2(2c-b)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a+3b &=& 0\\ a+c &=& 0\\ 2c-b &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a+c &=& 0\\ 3b-2c &=& 0\\ 2c-b &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a+c &=& 0\\ 3b-2c &=& 0\\ 2b &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow a=b=c=0$$
   Ainsi la famille est libre.
3. Montrons que la famille B formée par les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f_1: x\mapsto x^2$ et $f_2: x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est libre :
   Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $af_1+bf_2=0$ c'est à dire $ax^2+b\dfrac{1}{x}=0$ pour tout x.
   2 possibilités choisies parmi tant d'autre : on divise par x puis on regarde la limite en $+\infty$ pour voir que $a=0$ puis on évalue en 1 pour voir $b=0$.
   On peut aussi évalué en 1 et -1 pour avoir $\left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& 0\\ a-b &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& 0\\ 2a &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow a=b=0$
   Ainsi la famille est libre.
4. Un contre exemple : on considère la famille $\{(1,1,0);(1,2,1);(0,1,1)\}$.
   Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $a(1,1,0)+b(1,2,1)+c(0,1,1)=0$ alors $(a+b,a+2b+c,b+c)=0$ et ainsi on a :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& 0\\ a+2b+c &=& 0\\ b+c &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& 0\\ b+c &=& 0\\ b+c &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a &=& -b\\ c &=& -b\end{array}\right.$$
   Ainsi on peut trouver a,b,c non tous nuls tels que $a(1,1,0)+b(1,2,1)+c(0,1,1)=0$: il faut et il suffit de prendre $a=-b$ et $c=-b$ donc $a=-1$, $b=1$ et $c=-1$ fonctionnent.
   Ainsi on a $-(1,1,0)+(1,2,1)-(0,1,1)=0$ et donc $(1,2,1)=(1,1,0)+(0,1,1)$ (on aurait pu le remarquer) ou encore $(1,1,0)=(1,2,1)-(0,1,1)$ ou encore .....

Pour s'entraîner Étudier le caractère libre ou liéedes familles suivantes

1. $B=\{(1,0,1);(-2,0,1);(1,3,4)\}$
2. $B=\{(1,-1,0);(1,0,1);(3,-2,1)\}$
3. $B=\{1+X;X^2-X+1;X^3-2X+2\}$
4. $B=\{x\mapsto e^x;x\mapsto x^2+1;x\mapsto ln(x)-1\}$
5. $B=\{\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\}$

Montrer qu'une famille est une base

Il suffit de trouver une famille génératrice $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ puis d montrer qu'elle est libre. Si elle ne l'est pas alors on exprime un vecteur e_n comme C.L. des autres et donc par la propriété 2.11 du cours alors la famille $B=\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$ est génératrice : on montre qu'elle est libre, et si elle ne l'est pas alors on réitère le procédé.