Exercices, niveau 2 : Dérivations des fonctions réelles

Glossaire : ➩ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➨ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✷ désigne les exercices de niveau 2.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < -1$ et $f(x) = |x|$ si $x \geq -1$. Donner le domaine de définition, le domaine de continuité, et le domaine de dérivabilité de f.

➩Exercice 2 :

Donner le domaine de définition des fonctions f suivantes, justifier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et calculer f'.

(1) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2-x}\right)$ ➩ (2) $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}+\sqrt{x}}$ ➩ (3) $x \mapsto \arctan(\dfrac{1}{x})$ ➩ (4) $x \mapsto \cos(4x^3)$

➩Exercice 3 :

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition et déterminer leur dérivée :

(1) $f : x \mapsto x|x|$ ➩(2) $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-\ln(x)} \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ ➩ (3) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

➩Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $I = [0, 1]$ par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

1. ➩Montrer que f admet un minimum et un maximum sur I.
2. ➩Calculer $f(0)$ et en déduire le minimum de f sur I.
3. ➩Montrer que f atteint son maximum sur $]0, 1[$ et le calculer.

Exercice 5 :

1. Montrer que la fonction définie par $f(x) = \tan(x)^3$ sur $I = [0, \dfrac{\pi}{4}]$ réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.
2. Etudier la dérivabilité de $g = f^{-1}$ sur J.
3. Calculer $g'(1)$.

➩Exercice 6 :

1. ➩Étudier la dérivabilité de $|x^3|$ en 0 et de $\sqrt{x^3-1}$ en 1.
2. ➩ Calculer la dérivée, après avoir discuter de l'ensemble de dérivation de f définie par
   (a) ➩ $f(x)=\sqrt{x^2-x^3}$
   (b) ➩$x^{ln(x)}$

Exercice 7 : ✷

Soit deux réels a, b et la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f: x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2+bx+1 \text{ si } x>1 \end{cases}$.

1. Comment doit-on choisir a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 :

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque notée g définie sur $J=]-1,1[$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=1-(f(x))^2$.
3. Démontrer que g est dérivable sur J et calculer g' de deux manières : en utilisant le théorème de dérivation d'une fonction réciproque, et, seconde façon, en explicitant $g(y)$.

Exercice 9 :

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $t \in]0,x[$ tel que $\dfrac{\arctan(x)}{x}=\dfrac{1}{1+t^2}$.
   En déduire que : $\forall x \geq 0$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x)$.
2. (a) Soit t un réel strictement supérieur à 1.
   Montrer qu'il existe $c \in]t,t+1[$ tel que $\ln(\ln(t+1))-\ln(\ln(t))=\dfrac{1}{c\ln(c)}$.
   (b) En déduire que $\forall t>1$, $\dfrac{1}{(t+1)\ln(t+1)} \leq \ln(\ln(t+1))-\ln(\ln(t)) \leq \dfrac{1}{t\ln(t)}$.

➨Exercice 10 :

On considère la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $I=[0;\frac{\pi}{4}]$ que l'on note f.

1. ➨Montrer que $\forall t \in I$, $1 \leq f'(t) \leq 2$.
2. ➨En déduire que $\forall x \in I$, $x \leq \tan(x) \leq 2x$.

Exercice 11 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n \geq 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $\sqrt{6+x} = x$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{6}}|u_n - 3|$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 3| \leq \dfrac{3}{(2\sqrt{6})^n}$, puis que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 12 :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ possédant trois zéros distincts sur $[a,b]$. Montrer que f'' s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.

Exercice 13 :

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $f'(0) = 0$.
On pose ensuite la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to R$, $t \mapsto f(\sqrt{t})$.

1. Justifier que g est $C^1(\mathbb{R}_+^*)$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = f''(0)$ à l'aide du taux d'accroissement de f' en 0.
4. En déduire par un th. du cours que $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et donner $g'(0)$.

Exercice 14 ✵ :

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence, en utilisant le th. de la limite de la dérivée dans l'hérédité, que la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & si \quad x \geqslant 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

est $C^n(\mathbb{R})$. Pour cela, dans l'hérériditié, vous montrerez que f'_{n+1} est $C^1(\mathbb{R})$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_{n+1}(x) = (n+2)f_n(x)$ (indice : pensez au th. de la limite de la dérivée).

➨Exercice 15 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$. On admet que pour tout entier n, u_n existe et $u_n \geq 0$.

1. ➨Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$. Etudier les variations de f et montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
2. ➨Calculer f'' et en déduire que $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{3}$.

3. ➨Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0,1]$ une unique solution notée α.
4. ➨Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
5. ➨En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ puis que (u_n) converge.
6. ➨Donner une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Exercice 16

1. On considère une fonction f dont la dérivé est constante : montrer qu'il existe α et β telle que $f(x) = \alpha x + \beta$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. ✳ On considère une fonction f dérivation telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. En fixant y et en dérivant selon x, trouver toutes les fonctions g possibles.
3. ✳ Faire de même si, pour f dérivable encore, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (on vérifiera que si f n'est pas la fonction nulle alors f ne s'annule pas, puis qu'elle est positive, et conclure en utilisant $ln \circ f$).

Défi 1

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^2$$

Montrer que f est constante.

Défi 2

Trouver toutes les fonctions f dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(1 + x^2)f'(x) + f(x) = 0$$

(on regardera $exp(arctan(x))f(x)$ après avoir justifier de sa dérivabilité).

Défi 3

On regarde $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = xln(x)$. Donner le graphe de f, puis montrer que f est bijection de $[1/e; +\infty[$ vers $[-1/e; +\infty[$. Calculer la dérivée de f^{-1} puis donner léquation de sa tangente au point d'abscisse 0. En déduire en fonction de y, le nombre de solution de $x^x = y$ avec $x \neq 0$ (l'inconnu est x).