Exercices, niveau 2 : Probabilités générales

Exercice 0 :

Vrai ou Faux :
Si A et B sont deux événements négligeables, alors $A \cup B$ est négligeable.
Si A et B sont deux événements presque sûr, alors $A \cap B$ est presque sûr.

Exercice 1 :

Une urne contient 3 boules rouges et 5 blanches. On effectue indéfiniment des tirages d'une boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée, dans cette urne.

On note A_k l'événement "on n'obtient aucune boule blanche lors des k premiers tirages".

On note A l'événement "on obtient au moins une boule blanche lors de cette épreuve".

1. Vérifier que la suite d'événements $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.
2. En déduire le calcul de $P(\bar{A})$ puis la valeur de $P(A)$.

Exercice 2 :

Une particule se déplace chaque seconde sur l'un des sommets A, B ou C d'un triangle selon le processus suivant :

— A la première seconde, elle se pose au hasard sur l'un des 3 sommets.
— Si la particule est en B, elle y reste.
— Si elle est en A, elle va à la seconde suivante sur un des 3 sommets de façon équiprobable.
— Si elle est en C, à la seconde suivante, elle reste en C avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, migre vers B avec une probabilité de $\frac{7}{12}$, et vers A avec une probabilité de $\frac{1}{12}$.

Pour tout entier n non nul, on note A_n (resp. B_n et C_n) l'événement : "à la n-ième seconde, la particule est en A (resp. B et C), et a_n, b_n, c_n les probabilités de A_n, B_n, C_n.

1. Donner les valeurs de a_1, b_1, c_1.
2. Donner en les justifiant proprement des relations de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, a_n, b_n et c_n.
3. Montrer que pour tout entier n non nul, on a : $12c_{n+2} - 8c_{n+1} + c_n = 0$.
4. En déduire c_n puis a_n et b_n en fonction de n.
5. Etudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 3 :

Deux joueurs lancent chacun à leur tour deux dés à 6 faces équiprobables. Le premier joueur, appelé A, commence. Si la somme des points qu'il obtient est 6, il a gagné. Sinon, le second joueur, B, lance les dés à son tour, et s'il obtient une somme de 7, il a gagné. Sinon, A rejoue, et ainsi de suite.

1. Quelle est la probabilité que A gagne dès le premier lancer ? que B gagne au second ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité que A gagne au $(2n+1)$-ième lancer (événement noté A_{2n+1}), ainsi que la probabilité que B gagne au $(2n)$-ième lancer(événement B_{2n}).
3. Calculer la probabilité que A gagne la partie, puis la probabilité que B gagne la partie.
4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 4 :

On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est p (avec $p \in]0,1[$). On pose $q = 1 - p$.

1. Pour $n \geq 2$, on note A_n l'événement : "il n'y a aucune séquence FP dans la succession de ces n lancers". Calculer $P(A_n)$.
2. Que peut-on dire de la suite d'événements $(A_n)_{n\geq 2}$? En déduire $P\left(\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} A_n\right)$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 5 : Niveau 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_k)_k$ une suite d'événements.

1. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$P(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$$
   (b) En déduire que l'événement $\bigcap\limits_{n\geqslant 0}\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$ est négligeable. (on remarquera qu'une certaine suite d'éléments est décroissante)
   (c) Comment interpréter ce résultat ?
2. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ et que les événements $(A_k)_k$ sont mutuellement indépendantes. On pose pour tous $p,n \in \mathbb{N}$ tels que $p > n$:
   $$C_{n,p} = \bigcap_{k=n}^{p} \bar{A_k} \;\; et \;\; C_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \bar{A_k}$$
   (a) Justifier que pour tout réel x positif : $1 - x \leqslant exp(-x)$.
   (b) En déduire que $P(C_{n,p}) \leqslant exp(-\sum\limits_{k=n}^{p} P(A_k))$
   (c) Vérifier que $P(C_n) = 0$
   (d) Conclure en prouvant que l'événement $\bigcap\limits_{m\geqslant 0}\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$ presque sûr.
3. Un singe tape sur un clavier d'un ordinateur de manière complétement aléatoire. Justifier qu'à partir d'un certain moment, le singe écrira "à la recherche du temps perdu".