HEC ECS 1 : Puissances-polynômes-suites arithmético-géométriques

Exercice 1 M1

Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. Tout les entiers naturels sont positifs.
2. Il existe un réel a positif, tel que, pour tout x réel positif, $a+x>1$.
3. Pour tout réels x et y, $x^2+y^2 \geqslant 2xy$.

Exercice 2

Simplifier : $\sqrt{1}$; 1^{-3} ; $(-1)^{2p}$ avec $p \in \mathbb{Z}$; $(-1)^{2p+1}$ avec $p \in \mathbb{Z}$; $\sqrt[5]{11\sqrt[4]{11}}$.

Exercice 3 M1

Simplifier les fractions suivantes (lorsque c'est possible !) mais sans faire de calculs excessifs de somme ou de produit :

$$\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2+3}{3}\ ;\ \frac{2\times3\times4\times5}{4\times5\times6\times8}\ ;\ \frac{4\times3+3\times3}{3\times6}\ ;\ \frac{4}{\frac{7}{8}}\ ;\ \frac{\frac{4}{7}}{8}\ ;\ \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}\ ;\ \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

Pour vous aider à mémoriser les règles, simplifier (si possible) les fractions suivantes où a, b et c sont des réels quelconques :

$$\frac{a+b}{c+b}= \qquad ;\frac{a\times c}{b\times c}= \qquad ;\frac{1}{\frac{a}{b}}= \qquad ;\frac{a}{b}+\frac{a}{c}= \qquad ;\frac{a}{a+b}= \qquad ;\frac{a}{c}+\frac{b}{c}= \qquad ;$$

Vrai ou faux : $\dfrac{a\times b}{c}=\dfrac{a}{c}\times\dfrac{b}{c}$; $\dfrac{a\times c+b}{c\times d}=\dfrac{a+b}{d}$; $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$; $d\times\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a\times d+d\times b}{c}$.

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes, sans se préoccuper des conditions d'existence :

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\ ;\ \frac{\frac{a+b}{ab}}{a-b}\ ;\ \frac{a+b}{\frac{ab}{a-b}}\ ;\ \frac{1}{1-\frac{1}{2+x}}\ ;\ 2-\frac{1}{x-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$$

Exercice 5

Soient a et b deux réels non nuls. Simplifier les deux expressions : $\dfrac{a^{-6}b^2a^3}{(ab^2)^{-2}}$ et $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^{-3}\left(\dfrac{b^{-1}}{a}\right)^{-2}$

(On aboutit à une expression du type a^nb^p avec n et p entiers relatifs.)

Exercice 6

Simplifier les écritures suivantes :

$A=\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}$; $B=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $C=(\ \sqrt{6-3\sqrt{3}}-\sqrt{6+3\sqrt{3}}\ )^2$

Exercice 7

1. Montrer que $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$
2. En admettant que $2-\sqrt{3}>0$, montrer que $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.
3. Montrer finalement que $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$.

Exercice 8

Simplifier, sans se soucier des conditions d'existence, (on considèra $x,a>0$ et $x>a$) :

$$I=\sqrt{x-\sqrt{x^2-a^2}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

(indication : calculer I^2).

Exercice 9

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Simplifier le rapport $\dfrac{(1-\frac{2}{n})^n}{(1-\frac{1}{n})^{2n}}$ et en déduire que $(1-\frac{2}{n})^n\leq(1-\frac{1}{n})^{2n}$.

Exercice 10 M2

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2=3$, $x^2=-12$, $(x+3)^2=16$.
2. $|x|=2$, $|x|=-\pi$, $|x+2|=1$, $|-x+3|=|2x-3|$.
3. $e^x=3$, $e^x=-2$, $e^{2x-3}=12$, $e^{3x+1}=e^{2x-1}$.
4. $ln(2x+1)=2$, $ln(x^2-1)=1$.

Exercice 11 M2

1. Écrire sous la forme e^A les expressions suivantes : $\dfrac{e^x}{e}$, $(e^x)^2\times 2e$, $(e^{2x})^4\times e^{x+1}$
2. Factoriser les expressions suivantes : $e^{4x}+2e^x$, $2e^{2x}+6e^{6x}$
3. Écrire sous la forme $ln(A)$ les expressions suivantes : $ln(4)^+ln(5)$, $2ln(6)$, $4ln(2)-1/2$, $1/2\times ln(4x)+x$.
4. Exprimer $sin(a)sin(b)$ en fonction de $cos(a+b)$, $cos(a-b)$, $sin(a+b)$, $sin(a-b)$.

5. Montrer que $cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 2cos^2(x) - 1 = 1 - 2sin^2(x)$ et $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$.
6. Montrer que $cos^2(x) = \dfrac{1+cos(2x)}{2}$.
7. (défi) Montrer que $cos(x) + cos(y) = 2cos(A)cos(B)$ où A et B sont des expressions en x et y à trouver.

Exercice 12

Expliciter le terme général des suites suivantes en fonction de l'indice :

1. $\forall n \geq 2, 2a_n = a_{n-1}$ et $a_1 = 7$
2. $\forall p \geq 0, b_{p+1} - b_p = 3$ et $b_0 = -1$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = \dfrac{d_{n-1}}{2} + 9$ et $d_0 = 1$

Exercice 13

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Montrer que (u_n) est arithmético-géométrique.
3. En déduire le terme général de ces deux suites.

Exercice 14

Soit (a_n) la suite de nombres réels qui vérifie $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = -2a_n + 5^n$.
On cherche à calculer a_n en fonction de n et pour cela, on introduit la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n par $b_n = \dfrac{a_n}{5^n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation entre b_{n+1} et b_n.
2. En déduire l'expression de b_n en fonction de n, puis celle de a_n en fonction de n.
3. Calculer $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ en fonction de n.
4. Vérifier le résultat précédent dans le cas particulier où $n = 0$.

Exercice 15 M3

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x^2 - x - 1 = 0$; $3x^2 + x - 2 = 0$; $-x^2 - 5x + 1 = 0$; $\frac{1}{x} = x - 1$.

Exercice 16

Factoriser si possible les polynômes suivants et donner leur signe selon $x \in \mathbb{R}$:
$A = x^2 + 2x + 1$; $B = x^2 + x + 1$; $C = 3x^2 - x - 2$; $D = 2x^3 - 3x^2 + 1$; $E = x^3 - 8$; $F = x^3 + 1$

Exercice 17

Résoudre les équations suivantes en fonction du paramètre réel m : $(m^2+m)x = 2mx + m^3 - 1$;
$(m+2)x + 3m + 1 + \dfrac{m^2-6m}{2}x = \dfrac{7m}{2}$; $\dfrac{m}{x-m} + \dfrac{2m}{x+m} = \dfrac{3}{x^2-m^2}$.

Exercice 18 M3

Résoudre les inéquations suivantes : $x^2-2x-3 \leqslant 0$; $x^2-x-1 \leqslant 0$; $x^2+x-2 < 0$; $2x^2+x+1 \geqslant 0$.

Exercice 19 M3

Résoudre les inéquations : $(3x+1)(x+2) < 0$; $\dfrac{(3-2x)^2(x-5)}{(7x-1)(x-1)^5} > 0$; $(x^2-3x+2)^2-(x^2+5x-2)^2 < 0$.

Exercice 20

1. Trouver des réels a et b tels que pour tout réel x, $x \neq \frac{3}{2}$, $x \neq -\frac{3}{2}$, on ait :
   $\dfrac{1}{9x^2-4} = \dfrac{a}{3x-2} + \dfrac{b}{3x+2}$
2. Trouver des réels a, b et c tels que pour tout réel x, $x \neq 0$, $x \neq 1$, on ait :
   $\dfrac{2x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x-1}$
3. Trouver des réels a, b,c et d tels que pour tout réel x, $x \neq 1$, on ait :
   $\dfrac{2x^3+2x-1}{x-1} = ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-1}$

Exercice 21

Soit a un réel non nul, x un réel et f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x^3+ax}{3x^2+a}$.

1. Déterminer lorsque $a > 0$ le domaine de définition et le tableau de signes de f.
2. Même question lorsque $a < 0$.

Exercice 22 : facultatif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, où a et b sont des paramètres : $\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2 - \left(\dfrac{x+b}{x-b}\right)^2 = 0$