Fiche exercices 17 : Espaces vectoriels, généralités Niveau 2

Glossaire : ➩ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➡ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✳ désigne les exercices de niveau 2.

Les sous espaces vectoriels

Exercice 1

1. Soit $E=\mathbb{R}^4$. Montrer que, parmi les ensembles suivants, seul F est un sous espace vectoriel de E.
   1. $F=\{(x,y,z,t)\in E|x+z=y+t\}$ 2. $G=\{(x,y,z,t)\in E|x\neq 3\}$ 3. ➡ $H=\{(x,y,z,t)\in E|xz=yt\}$.
2. Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Parmi les ensembles suivants, un seul n'est pas un sous espace vectoriel de E. Lequel et pourquoi ? Justifier que les deux autres sont bien des sous espaces vectoriels de E.
   1. $F=\{P\in\mathbb{R}[X]|P(0)=1\}$ 2. ➡ $G=\{P\in\mathbb{R}[X]|P+P'=0\}$ 3. $H=\{P\in\mathbb{R}[X]$ tels que X^2 divise $P\}$.
3. Soit $E=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.Soit F le sous-ensemble de E des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$. F est-il un sous-espace vectoriel de E ?
4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels ? (on justifiera par un contre exemple, ou dans le cas de l'affirmative, en exhibant un espaces vectoriels dont c'est un sev).
   — Les suites réelles convergentes.
   — Les suites réelles convergentes vers un même l. (on distinguera des cas en fonction de l).
   — Les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
   — Les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
   — ➡ L'ensemble des suites majorées par 1.
   — L'ensemble des suites majorées.
   — L'ensemble des suites géométriques.
   — L'ensemble des suites arithmétiques.
   — $F=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})|f(1)=0\}$
   — ➡ $F=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})|f(0)=2\}$
   — ➡ L'ensemble des matrices inversibles de taille n

➩ Exercice 1 bis :

Montrer que $F=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|x_1=x_2=x_3\}$ est un sous espace vectoriel.

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des fonctions dérivables telles que $f''-2f'+f=0$ est un espace vectoriel

Combinaisons linéaires

Exercice 3

1. Soit $u=(1,2,1)$, $v=(2,-1,-2)$ et $w=(-1,2,k)$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer $k\in\mathbb{R}$ pour que $w\in\text{Vect}(u,v)$.
2. ➡ Soit $u=(1,2,3,4)$, $v=(1,-2,3,-4)$ dans $\mathbb{R}^4$. Peut-on déterminer $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ pour que $(x,1,y,1)\in\text{Vect}(u,v)$? Peut-on déterminer $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ pour que $(x,1,1,y)\in\text{Vect}(u,v)$?

➩ Exercice 4

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u=(1,-2,-3)$, $v=(-1,-1,3)$, $w=(-2,0,1)$ et $t=(1,2,-1)$. Les familles suivantes sont-elles libres ? si non, déterminer une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille.
1. (u) 2. (u,v) 3. (u,v,w) 4. (u,v,w,t).

Exercice 5

Décrire par des équations $F=Vect(u,v)$ où $u=(0,-1,2,1)$ et $v=(-1,3,1,0)$.

Familles libres, familles génératrices, bases

Exercice 6

1. Soit $H=\{(a+b,b+c,c-a)\,|\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. ➩ Montrer que $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
3. ➩ Montrer que $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y-z+2t=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
4. ➩ Montrer que $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \text{ et } x-2y-z=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base. Écrire cet espace vectoriel comme l'intersection de deux espaces vectoriels.
5. Montrer que l'ensemble des suites réelles u telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 7

1. Dans $E=F(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$, on considère les fonctions : $f_1:x\mapsto 1$, $f_2:x\mapsto \ln(x)$, $f_3:\mapsto x$, $f_4:x\mapsto e^x$. Montrer que la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est libre.
2. Montrer que la famille de suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}=(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}=(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}=(5^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille libre dans l'espace vectoriel des suites réelles.
3. ✳ $\forall k\in\mathbb{N}$, soit $f_k:x\in\mathbb{R}\mapsto e^{kx}\in\mathbb{R}$. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}$, la famille $(f_k)_{0\le k\le n}$ est libre.

Exercice 8

1. Montrer que $E=\{P\in\mathbb{R}_4[X]\,|\,P(2)=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Donner une base de E.
3. Vérifier que $P=X^4-4X^3+3X^2+4X-4$ appartient à E puis décomposer P dans la base de la question précédente.

Exercice 9

1. ➩ La famille (v_1,v_2,v_3) de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ où $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$ est-elle libre ? Sinon, quelle relation de dépendance linéaire lie ces vecteurs ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$.
3. La famille (v_1,v_2,v_3) est-elle génératrice de $M_{3,1}(\mathbb{R})$?

✳ Exercice 10

Justifier que l'ensemble des matrices symétriques de taille n est un espace vectoriel. Donner en une base.

Exercice 11

Soit E un -espace vectoriel. Soient A et B deux familles de vecteurs telles que A contienne B. On peut par exemple poser : $A = (u_1, u_2, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_n)$ et $B = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. A liée $\Rightarrow B$ liée   2. B liée $\Rightarrow A$ liée   3. A libre $\Rightarrow B$ libre
4. A est génératrice de $E \Rightarrow B$ est génératrice de E 5. B est génératrice de $E \Rightarrow A$ est génératrice de E

Vos réponses doivent bien évidemment être justifiées, soit par une courte justification s'appuyant sur une définition du cours, soit par un contre-exemple.

➯ Exercice 12 :

La famille $\{A, B, C, D\}$ est elle libre ou liée dans le cas suivant ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

✳ Exercice 13 :

Considèrons $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier p et $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$.

1. On suppose que $p = 3$, démontrer que la famille $\{I_n, A, A^2\}$ est libre.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, mnotrer que la famille $\{I_n, A, ..., A^{p-1}\}$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{R})$.

✳ Exercice 14 :

(Les quaternions) Pour tous x, y, z, $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$M(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix} \ et\ \mathbb{H} = \{M(x,y,z,t) \in M_4(\mathbb{R}) | x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$$

1. (a) Expliciter les matrices $I = M(1,0,0,0)$, $J = (0,1,0,0)$, $K = M(0,0,1,0)$ et $L = M(0,0,0,1)$.
   (b) $KJ = -L$, $J^2 = -I$ et $JK = L$. Montrer 7 identités semblables.
2. (a) Justifier que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel.
   (b) Montrer que la famille (I, J, K, L) est une base de $\mathbb{H}$. Est ce une base de $M_4(\mathbb{R})$?
   (c) Donner les coordonnées de $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.
3. En utilisant les questions 1 et 2, montrer que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication matricielle.
4. Montrer par le calcul de $M(x,y,z,t)M(x,-y,-z,-t)$ que toutes matrices de $\mathbb{H}$ est inversible et préciser son inverse.