Exercices : probabilités conditionelles

Glossaire : ➪ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➡ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✳ désigne les exercices de niveau 2.

Exercice 1 : ➪

On considère 2 évènements A et B tels que $P(A) = 0.6$ et $P(B) = 0.4$. Calculer $P(A \cup B)$ lorsque :
1. A et B sont incompatibles. 2. La réalisation de B entraîne celle de A. 3. A et B sont indépendants.

Exercice 1 bis : ➪

Dans une compétition sportive, deux lanceurs de poids A et B s'affrontent. On a observé que A dépasse les 20 mètres dans 85% de ses lancers, alors que B ne réussit cette performance que dans 60% de ses lancers.
Les performances des deux lanceurs sont indépendantes. A et B lancent chacun une fois le poids.

1. Quelle est la probabilité que l'un des deux lanceurs seulement dépasse 20 mètres ?
2. Un seul lanceur a dépassé les 20 mètres. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 2

Un grand magasin est équipé d'un système d'alarme contre l'incendie. L'installateur du système assure qu'en cas de début d'incendie (événement noté I), l'alarme sera déclenchée (événement noté A) avec une probabilité de 0,99. Mais il faut noter que même sans aucun danger, l'alarme peut tout de même se déclencher, donnant lieu à une fausse alerte, avec une probabilité évaluée à 0,007. La compagnie d'assurance du grand magasin considère qu'un incendie peut s'y déclarer avec une probabilité égale à 0,001.

1. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
2. Si l'alarme se déclenche, quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

Exercice 3 ➪

Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges :
Classe 1 : moins de 25 ans.
Classe 2 : de 25 ans à 50 ans.
Classe 3 : plus de 50 ans.
Le tableau ci-dessous fournit deux informations :

— La proportion d'assurés appartenant à chaque classe
— La probabilité qu'un assuré, d'une classe donnée, déclare au moins un accident au cours de l'année.

Classe	Proportion	Probabilité
1	0,25	0,12
2	0,53	0,06
3	0,22	0,09

1. Un assuré est tiré au hasard dans le fichier de la compagnie. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident au cours de l'année ?
2. Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident au cours de l'année soit agé d'au plus 25 ans ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un assuré soit agé de 25 ans ou plus et ait au moins un accident au cours de l'année ?
4. Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident appartienne à la classe 2 ?

Exercice 4

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire une boule de cette urne. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne. Si elle est noire, on la remet dans l'urne et on rajoute deux boules blanches. On tire alors une deuxième boule de l'urne. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche ?

Exercice 5

On considère n urnes $U_1,\ldots,U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, puis on tire successivement deux boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches, si le tirage se fait avec remise ?
2. Même question si le tirage se fait sans remise.

On donne la formule : $\sum_{k)=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 6

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages successifs d'une boule. Soit k un entier compris entre 1 et n. Quelle est la probabilité que les k premières boules tirées soient blanches ?

— si les tirages ont lieu avec remise.
— si les tirages ont lieu sans remise.

Comparer ces deux résultats.

Exercice 7

On lance deux fois un dé équilibré et on considère les trois événements suivants : E = "la somme des deux lancers est égale à 6", F : "la somme des deux lancers est égale à 7" et G : "le premier lancer a donné un 4". Etudier l'indépendance de E et G puis celle de F et G.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère une famille de n enfants. On considère les évènements A :"avoir au moins une fille et au moins un garçon" et B : "avoir au plus une fille". On suppose dans cet exercice qu'à la naissance, un enfant a autant de chances d'être un garçon qu'une fille, et que les naissances successives sont mutuellement indépendantes. Etudier l'indépendance de ces deux événements dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 9

Un appartement est composé de deux pièces A et B reliées entre elles par une porte ouverte. Seule la pièce B possède une issue pour aller dehors à l'air libre. Une guêpe se trouvant dans l'appartement voudrait aller dehors à l'air libre.

Elle se déplace selon les règles suivantes :

— si elle est dans la pièce A à l'instant n, alors, à l'instant $n+1$, elle reste dans la pièce A avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe dans la pièce B avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

— si elle est dans la pièce B à l'instant n, alors, à l'instant $n+1$, elle passe dans la pièce A avec la probabilité $\frac{1}{4}$, ou elle reste dans la pièce B avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ou elle va dehors à l'air libre avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

— si elle est dehors à l'air libre alors elle ne revient plus dans l'appartement.

A l'instant 0, la guêpe est dans la pièce A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement "la guêpe est dans la pièce A à l'instant n", B_n l'événement "la guêpe est dans la pièce B à l'instant n" et C_n l'événement "la guêpe est dehors à l'air libre à l'instant n". On note également a_n, b_n et c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n.

1. Déterminer les valeurs de a_0, b_0, c_0 et a_1, b_1, c_1.
2. Pour tout entier naturel n, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements (A_n, B_n, C_n), vérifier que :
$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$, $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + c_n$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+2} = \frac{5}{6}a_{n+1}$. En déduire a_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
4. Calculer b_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
5. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $c_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} b_k$. En déduire c_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
6. Pour tout $n \geq 2$, on considère l'événement S_n : "l'instant n est le premier instant au cours duquel la guêpe est dehors à l'air libre". Exprimer S_n en fonction de certains des événements A_i, B_i ou C_i puis calculer $P(S_n)$. Que vaut $\lim_{n \to +\infty} P(S_n)$?

Exercice 10 ✷

On range de façon aléatoire n boules numérotées dans n tiroirs numérotés de façon bijective, c'est à dire une seule boule dans un tiroir.

1. Décrire l'univers des éventualités et calculer son cardinal.
2. Sachant que b_1 est rangé dans t_1, quelle est la probabilité que b_2 soit rangé dans t_2 ?
3. Quelle est la probabilité de ranger b_2 dans t_2 sachant que b_1 n'est pas rangé dans t_1 ?

Exercice 11 : ✷

On cherche à savoir quelle est la proportion d'administrateurs de sociétés ayant commis des délits d'initiés (utilisation d'informations privilégiées sur la position financière de la société pour réaliser des gains illégaux en achetant ou vendant des actions). Quel serait l'administrateur qui accepterait de répondre sans détour si on ne lui

garantissait pas un anonymat absolu ?
On va donc formuler le questionnaire de façon que rien ne transparaisse : on demande à chaque administrateur de lancer une pièce (non truquée). S'il obtient pile, on lui demande de répondre à la question : « Avez-vous un jour commis un délit d'initié ? » (on suppose alors que les administrateurs disent la vérité). S'il obtient face, on lui demande de relancer la pièce et de répondre à la question : « Avez-vous obtenu face la deuxième fois ? ».
Lorsque l'administrateur revient et répond à l'enquêteur « oui », il n'est pas possible à l'enquêteur de savoir si le oui est une réponse à la question sur le délit d'initié, ou à la question sur le jeu de pile ou face. Ainsi l'anonymat est parfaitement conservé.
Mais comment exploiter le résultat de l'enquête ?

1. Supposons que la proportion d'administrateurs ayant commis un délit d'initié soit $a = 20\%$ par exemple. En supposant que le jeu de pile ou face ait donné 50% de pile et 50% de face, quelle proportion b d'administrateurs répondraient « oui » à l'enquêteur ?
2. Généraliser la question précédente en trouvant a en fonction de b.
3. L'enquêteur a obtenu 30% de « oui ». Toujours avec les mêmes hypothèses, quelle est la proportion d'administrateurs ayant commis un délit d'initié ?

Défi ✳

Le finaliste d'un jeu télévisé est placé devant 3 portes, derrière l'une d'elle il y a une voiture et les autres rien. L'animateur sait la localisation de la porte gagnante et le candidat l'ignore. Le candidat choisit la porte 1 et l'animateur dévoile alors la porte 3 qui ne contient rien. Il propose alors au candidat de changer de porte s'il le souhaite. On note V_i : "la voiture est derrière la porte i" et E :" le présentateur ouvre la porte 3".
En utilisant les probabilités conditionnelles, déterminer si le candidat à intéret ou non à changer de porte.

Défi 2 ✳

On choisit au hasard 4 chaussettes dans un tiroir en contenant 20.
Quelle est la probabilité d'avoir au moins une paire ?