

HEC ECS 1 : Les fonctions continues, niveau 2 :

Exercice 1

Les fonctions suivantes sont-elles continues sur \mathbb{R} ?

$$(1) f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2) f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3) f : x \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ \arctan(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Montrer que tout polynôme P de degré impair possède au moins une racine réelle.

Un polynôme de degré impair est une fonction du type $x \mapsto \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$ où $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$ sont des réels et n un entier naturel.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x-8}{x-2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]2, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
2. Déterminer la bijection réciproque.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $I = [0, 1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Étudier les variations de f sur I .
2. Montrer que f réalise une bijection de I vers un ensemble que l'on déterminera.
3. Donner le tableau de variations de f^{-1} (la bijection réciproque de f).
4. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1]$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$.

Exercice 5

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur \mathbb{R} :

$$(1) f : x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln(x^2 + x - 1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (2) f : x \mapsto \begin{cases} -\arctan(\ln(1-x)) & \text{si } x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 1 \\ \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 6 (niveau 1 uniquement)

Montrer que l'équation $\exp(-x^2) = x$ admet une unique solution α sur \mathbb{R}^+ . Montrer que $\alpha \in]0, 1[$.

Exercice 7 (niveau 2 uniquement)

Soit $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ vers $[a, b]$. On considère g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Quel est le signe de $g(a)$? de $g(b)$?
2. En déduire que f a au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 8

Soit f continue sur son domaine de définition $D_f = [-1; 1]$ vers \mathbb{R} vérifiant $f(-1) = f(1)$.

1. Donner le domaine de définition D_g de la fonction $x \mapsto g(x) = f(x+1) - f(x)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in D_g$ tel que $f(c+1) = f(c)$.

Exercice 9

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + n x$.

1. Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$.
2. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur \mathbb{R} .
3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur \mathbb{R} , notée u_n .
4. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-1}{n} < u_n < 0$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 10

Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels tels que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

On pose $g(x) = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_n}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g$.
En déduire les variations de g .
2. Discuter le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$ selon $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $P_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.
2. Calculer x_1 et x_2 .
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_{n+1}(x_n)$ puis comparer $P_{n+1}(x_n)$ et $P_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite (x_n) .
4. En déduire la convergence de (x_n) vers une limite notée α .
5. Montrer que $\alpha = 1$.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel supérieur ou égal à 1, que l'on notera x_n , tel que $f(x_n) = n$.
2. Déterminer x_1 .
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ ainsi définie est strictement croissante.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Exercice 13 : niveau 2

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . on dit qu'une fonction f est lipschitzienne sur I s'il existe une constante $K \in \mathbb{R}^+$ telle que :
 $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

1. Montrer qu'une fonction Lipschitzienne est continue.
2. Montrer que $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$. En déduire que, **sur un intervalle bornée**, la fonction $x \mapsto x^n$ est lipschitzienne.
3. En déduire que les fonctions polynômes sont continues.

Exercice 14 : niveau 2

On considère un réel $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

Montrer que l'équation $x^2 - qx - pq = 0$ d'inconnue x admet deux racines réelles distinctes, notées r et s , vérifiant $-1 < r < 0 < s < 1$.

Exercice 15

On considère un entier naturel non nul n et n réels distincts : $a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x - a_k|$.

Calculer $f_n(0) + f_n(1)$ et en déduire qu'il existe un réel $u \in [0, 1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.

Exercice 16 défi

On dit qu'une fonction f admet un point fixe si il existe $a \in I$ tel que $f(a) = a$.

1. Soit $f : [a; b] \rightarrow [a, b]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un point fixe. Donner un contre exemple si f n'est pas continue.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f$ admet un point fixe, montrer que f admet un point fixe.

Exercice 17 : défi

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique ($T > 0$).

Montrer que : $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(c + \frac{T}{2}) = f(c)$.

Exercice 18 : défi

Un cycliste parcourt 24 km en 1 heure. Démontrer qu'il existe un intervalle d'un quart d'heure pendant lequel le cycliste a parcouru exactement 6 km.

On utilisera la fonction $d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ où $d(t)$ est la distance parcourue en t heure (on admettra qu'elle est continue).