HEC ECS 1 : Les fonctions continues, niveau 1 :

Exercice 1

Les fonctions suivantes sont-elle continues sur $\mathbb{R}$?

(1) $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \exp(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ (2) $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ (3) $f : x \mapsto \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ \arctan(x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Exercice 2

Soit P un polynôme de degré impair. Justifier que P est continue sur et discuter des limites en $+\infty$ et $-\infty$ par une disjonction de cas.

Montrer que tout polynôme P de degré impair possède au moins une racine réelle.

Un polynôme de degré impair est une fonction du type $x \mapsto \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$ *où* $a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}$ *sont des réels et n un entier naturel.*

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x-8}{x-2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]2, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
2. Déterminer la bijection réciproque.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $I = [0, 1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Etudier les variations de f sur I.
2. Montrer que f réalise une bijection de I vers un ensemble que l'on déterminera.
3. Donner le tableau de variations de f^{-1} (la bijection réciproque de f).
4. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1]$ tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$

Exercice 5

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:

(1) $f : x \mapsto \begin{cases} \sin(x) \text{ si } x \leq 0 \\ \exp\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right) \text{ si } 0 < x < 1 \\ \ln(x^2 + x - 1) \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ (2) $f : x \mapsto \begin{cases} -\arctan(\ln(1-x)) \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } x = 1 \\ \arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 6 (niveau 1 uniquement)

Montrer que l'équation $\exp(-x^2) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\alpha \in]0,1[$.

Exercice 7 (niveau 2 uniquement)

Soit $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ vers $[a,b]$. On considère g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Quel est le signe de $g(a)$? de $g(b)$?
2. En déduire que f a au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 8

Soit f continue sur son domaine de définition $D_f = [-1;1]$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant $f(-1) = f(1)$.

1. Donner le domaine de définition D_g de la fonction $x \mapsto g(x) = f(x+1) - f(x)$.
2. Justifier que la fonction g est continue sur D_g et discuter des valeurs de g sur le bord de son ensemble de définition. Montrer, à l'aide du TVI, qu'il existe $c \in D_g$ tel que $f(c+1) = f(c)$.

Exercice 9

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x$.

1. Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$.
2. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
4. En utilisant le fait que $f_n(u_n) = 0$, et que $1 + e^{-u_n} > 1$ montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 10

Soit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
On pose $g(x) = \dfrac{1}{x-a_1} + \dfrac{1}{x-a_2} + \cdots + \dfrac{1}{x-a_n}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g$.
   En déduire les variations de g.
2. Discuter le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$ selon $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $P_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.
2. Calculer x_1 et x_2.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_{n+1}(x_n)$ puis comparer à l'aide de la définition de x_n et de x_{n+1}, $P_{n+1}(x_n)$ et $P_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire, en utilisant le sens de variation de P_{n+1}^{-1} la monotonie de la suite (x_n).
4. En déduire la convergence de (x_n) vers une limite notée α.
5. Montrer que $\alpha = 1$.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel supérieur ou égal à 1, que l'on notera x_n, tel que $f(x_n) = n$.
2. Déterminer x_1.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ ainsi définie est strictement croissante.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Exercice 13 : niveau 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. on dit qu'une fonction f est lipschitzienne sur I s'il existe une constante $K \in \mathbb{R}^+$ telle que : $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$.

1. Montrer qu'une fonction Lipschitzienne est continue.
2. Montrer que $x^n - y^n = (x-y)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$. En déduire que, **sur un intervalle bornée**, la fonction $x \mapsto x^n$ est lipschitzienne.
3. En déduire que les fonctions polynômes sont continues.

Exercice 14 : niveau 2

On considère un réel $p \in]0,1[$ et on note $q = 1 - p$.
Montrer que l'équation $x^2 - qx - pq = 0$ d'inconnue x admet deux racines réelles distinctes, notées r et s, vérifiant $-1 < r < 0 < s < 1$.

Exercice 15

On considère un entier naturel non nul n et n réels distincts : $a_1, ..., a_n \in [0,1]$.
On considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|$.
Calculer $f_n(0) + f_n(1)$ et en déduire qu'il existe un réel $u \in [0,1]$ tel que $f_n(u) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 16 défi

On dit qu'une fonction f admet un point fixe si il existe $a \in I$ tel que $f(a) = a$.

1. Soit $f : [a;b] \to [a,b]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un point fixe. Donner un contre exemple si f n'est pas conitnue.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tele que $f \circ f$ admet un point fixe, montrer que f admet un point fixe.

Exercice 17 : défi

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique ($T > 0$).
Montrer que : $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(c + \dfrac{T}{2}) = f(c)$.

Exercice 18 : défi

Un cycliste parcourt 24 km en 1 heure. Démontrer qu'il existe un intervalle d'une quart d'heure pedant lequel le cycliste a parcourut exactement $6km$.
On utilisera la fonction $d : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ où $d(t)$ est la distance parcourut en t heure (on admettra qu'elle est continue).