Exercices, niveau 2 : intégrales impropres

Exercice 0 :

Donner les primitives de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+3x} + x^4 + e^{-2x+1}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{(1+4x)^3}$; $f : x \mapsto sin(x) + 3cos(x) - \dfrac{1}{cos^2(x)}$; $f : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}x}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$; $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$; $f : x \mapsto sin(x)(cos(x)+1)^n$; $f : t \mapsto \dfrac{1}{ln(t)t}$.
3. $f : t \mapsto \dfrac{e^t+1}{\sqrt{e^t+t}}$; $f : t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$; $f : x \mapsto \dfrac{1}{2xln(1+x^2)}$; $f : x \mapsto xe^{-x^2}$.

Pour les 3 exercices suivants, les intégrales sont impropres uniquement en $+\infty$

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes et calculer les intégrales convergentes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{\exp(t)}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}dt$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right)dt$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t+1)}dt$

Exercice 2

Montrer que les intégrales suivantes convergent :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-3t}dt$

Exercice 3

Très classique : on prouve la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ avec une intégration par parties.

1. Soit x un réel tel que $x \geq 1$. Montrer que
$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$
2. En déduire la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$

Exercice 4

Parmi les intégrales suivantes, repérer celles qui sont impropres (la nature de ces intégrales impropres n'est pas demandée) :

1. $\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$ 2. $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t}dt$ 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)dt$ 4. $\int_0^4 \frac{e^t}{t}dt$
5. $\int_0^1 \ln(t)dt$ 6. $\int_0^1 \sqrt{1-t}dt$ 7. $\int_{-2}^2 \frac{1}{1+t^3}dt$ 8. $\int_0^1 \frac{1}{t^2-4}dt$

Exercice 5

Soit x un réel strictement positif. Calculer $\int_x^1 \ln(t)dt$ puis en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^1 \ln(t)dt$.

Exercice 5 bis :

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{ln(t)^3}{t^2}\,dt,\ \int_0^1 \frac{cos(t)}{\sqrt{t}}\,dt,\ \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt,\ et \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+\sqrt{t})^3}\,dt,$$

Exercice 6

Parmi les intégrales impropres suivantes, 2 sont "faussement impropres". Lesquelles et pourquoi ? Etudier la nature de l'intégrale "vraiment impropre".

1. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ 2. $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ 3. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-t}}dt$

Exercice 7

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge et donner sa valeur.
2. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.

Exercice 7 bis

Discuter de la convergence des intégrales suivantes en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\,dt$
2. $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{\beta t}\,dt$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{arctan(t)}{t^\alpha}\,dt$
4. $\int_0^1 \frac{arctan(t)}{t^\alpha}\,dt$

Exercice 8 : *Fonction gamma*

Pour tout réel x, on considère l'intégrale $\Gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

Montrer que : Γ est convergente $\Leftrightarrow x > 0$.

Ceci permet de définir la fonction $\Gamma : x \in]0,+\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ qui sera étudiée en ECS2.

Néanmoins, nous allonrs réaliser les questions suivantes :

Préciser $\Gamma(1)$

Défi : justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$.

Exercice 9

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt$ et $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt$

1. Justifier l'existence de J_n pour tout entier naturel n.
2. Pour x réel positif, montrer

$$\int_0^x t^n e^{-t^2}dt = \frac{e^{-x^2}x^{n+1}}{n+1} + \frac{2}{n+1}\int_0^x e^{-t^2}t^{n+2}dt$$

.

3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $J_{n+2} = \frac{n+1}{2}J_n$.
4. On admet que $J_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Montrer que pour tout entier naturel n, $J_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. Calculer J_1 puis J_{2n+1} pour tout entier naturel n.
6. Justifier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt$ pour tout entier naturel n.
7. Déterminer, pour tout entier naturel n, les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1}.

Exercice 10 : Niveau 2

1. (a) Montrer la convergence des intégrales $\int_0^1 ln(t)\,dt$ et $\int_0^1 ln(1-t)\,dt$ et leur égalité.

   (b) Calculer la valeur des intégrales $I = \int_0^1 ln(t^3-t^4)\,dt$ et $J = \int_0^1 ln(1-t^2)\,dt$
2. Montrer que l'intégrale $K = \int_1^e \frac{1}{t\sqrt{ln(t)}}dt$ est convergente. (on pourra faire le changement de variable $u = ln(t)$)
3. À l'aide d'une IPP, montrer que l'intégrale $L = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-|t|}\,dt$ est convergente.

Exercice 11 : niveau 2

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\phi(t) = \frac{sin(t)}{t}$$

1. Justifier que ϕ est prolongeable par continuité en 0. En déduire la convergence de $\int_0^1 \frac{sin(t)}{t}\, dt$.

2. En utilisant un exercice déjà réalisé, montrer que $\int_0^{+\infty} \phi(t)\, dt$ converge.

3. (a) Prouver la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{cos(2t)}{t}\, dt$

   (b) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|sin(t)| \geqslant sin(t)^2 = \frac{1}{2}(1 - cos(2t)$

   (c) En déduire que $\int_0^{+\infty} \phi(t)\, dt$ n'est pas absolument convergente.

4. Vérifier que

$$\frac{sin(t)}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{sin(t)}{t} + \frac{|sin(t)|}{t}$$

   Montrer que ces intégrales sont de nature différente.

Exercice 12 : niveau 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $\phi(P) = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt$
Justifier que $\phi(P)$ est bien définie. Que dire si $\phi(P) = 0$?