

HEC ECS 1 : Ensembles et applications, niveau 2

1 Travailler les bases

1.1 Un peu de logique

- Parmi les 2 propositions suivantes, laquelle est la plus avantageuse ?
 - P : pour obtenir son année, il faut avoir une moyenne supérieure à 10/20.
 - Q : pour obtenir son année, il suffit d'avoir une moyenne supérieure à 10/20.
- (a) Donner la négation, puis la contraposée de :
 - Si tu échoues à tes examens, tu ne partiras pas en vacances.
 - Si une fonction est dérivable, elle est continue.
- (b) Si l'assertion : "si je ne peins pas mon portail en fer, il va rouiller" est vrai, peut on en déduire que : "si je le peins, il ne rouillera pas" ?

1.2 Manipulation de base

On considère les ensembles $A = \{0; 5; 7\}$, $B = [[4, 7]]$ et $C = \{n \in [[0, 7]] \mid n \neq 1 \text{ et } n \neq 4\}$
Compléter les propositions suivantes avec le symbole adéquat :

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1. $A \dots C$ | 1. $\emptyset \dots C$ |
| 2. $5 \dots A$ | 2. $3 \dots B$ |
| 3. $6 \dots B$ | 3. $\{6\} \dots B$ |
| 4. $\{2, 5\} \dots C$ | 4. $\{9\} \dots C$ |

1.3 Vraie ou faux

Soit A et B deux ensembles. Est ce que les propositions suivantes sont vraies ? Justifier.
 $A \cap B \subset B$, $A \cup B \subset B$, $A \cap \bar{B} \subset A \cup B$.

1.4 Démontrer une inclusion

Soit A et B les ensembles suivants, montrer que $A \subset B$:

- A est l'ensemble des entiers positifs multiples de 6 et B l'ensemble des entiers pairs.
- A est l'ensemble des fonctions dérivables sur I un intervalle et $B = C^0(I)$.
- A est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x = 1 + y$, et $z = 1 - y$ et B l'ensemble de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - xz = y^2 \text{ et } x + z = 2\}$
- Soient C et D des ensembles. Alors A est l'ensemble des sous parties de $C \cap D$ et B l'ensemble des sous parties de C .

1.5 Travailler la démonstration à l'aide de la définition

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E vérifiant $A \cap B = A \cup B$. Montrer que $A = B$.

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

- $A \subset B$
- $A \cap B = A$
- $A \cup B = B$

1.6 Travailler la démonstration à l'aide de la définition 2

Soient A et B des ensembles quelconques. Montrer que $A \cap \bar{B} = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$

2 Formules de Morgan

On considère une suite de sous-ensembles $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ inclus dans un ensemble E .

1. Montrer que étant donné A et B deux sous-ensembles de E , $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. En déduire que étant donné A et B deux sous-ensembles de E , $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier n non nul, $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$.

3 Inclusions

On considère une suite d'ensembles $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n = \bigcap_{k=1}^n A_k \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une relation d'inclusion entre les ensembles I_n et I_{n+1} . Même question avec les ensembles U_n et U_{n+1} .

4 Unions d'intersections

Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Calculer :

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
2. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ (utiliser la première question !)

5 Réunions et intersection dénombrables

Déterminer les sous-ensembles de \mathbb{R} suivants : 1. $\bigcap_{n=1}^{+\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. 2. $\bigcup_{n=1}^{+\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$.

6 Propriétés sur les ensembles

Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$((A \cap B) \subset (A \cap C) \text{ et } (A \cup B) \subset (A \cup C)) \Rightarrow B \subset C$$

7 (niveau 2) Travailler la démonstration à l'aide de la définition 3

Soient A, B et C des ensembles quelconques. Montrer que si $A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$ alors $A = B = C$

8 La fonction valeur absolue

Soit E et F deux parties de \mathbb{R} et soit f l'application de E dans F qui à x associe $|x|$. Dire si f est injective ou surjective dans les cas suivants :

1. $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$
2. $E = \{0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
3. $E = F = [-1; 1]$
4. $E = F = \mathbb{R}_+$

9 Une application dans \mathbb{R}^2

Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$ pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 .

1. Trouver le(s) antécédent(s) du couple $(3, 2)$. L'application f est-elle injective ?
2. Est-elle surjective ?

10 Recherche de bijections réciproques

Pour les applications suivantes, démontrer qu'elles sont bijectives et déterminer l'application réciproque f^{-1} :

1. $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 5 \end{pmatrix}$
2. $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{pmatrix}$
3. $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + z, y + 2z, x + 2z) \end{pmatrix}$

Montrer que l'application suivante ne peut pas être injective en cherchant les antécédants de $(0, 0)$: $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + z, x + y + z) \end{pmatrix}$

11 Composées et injectivité/surjectivité

Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective.
3. (niveau 2) Montrer le théorème suivant : Une application f définie d'un ensemble E dans F est une bijection de E vers F si et seulement si il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

12 Niveau 2 : Dans les entiers

$$\text{Soit } f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right) \text{ et } g : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \end{array} \right).$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g .
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

13 Application bijectives définie par morceaux (si temps)

$$\text{Soit } f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array} \right) \text{ et } g : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right).$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g .
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Commenter le résultat.

14 Défi 1

$$\text{Soit } A \text{ une parti d'un ensemble } E. \text{ On pose } \phi : \begin{cases} P(E) & \rightarrow & P(A) \times P(\bar{A}) \\ M & \mapsto & (A \cap M, \bar{A} \cap M) \end{cases}$$

1. Justifier que ϕ est injective.
2. Faire de même pour la surjectivité.
3. Que peut on dire pour ϕ ? Donner la bijection réciproque?

15 Défi 2

On considère E, F et G 3 ensemble et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Soit $\phi : E \rightarrow F \times G$ définie par $\phi(x) = (f(x), g(x))$

1. Montrer que si f ou g est injective alors ϕ est injective.
2. Montrer que si ϕ est surjective alors f et g le sont aussi.
3. Montrer que les réciproques sont fausses.