HEC ECS 1 : Ensembles et applications, niveau 1

1 Travailler les bases

1.1 Un peu de logique

1. Parmi les 2 propositions suivantes, laquelle est la plus avantageuse ?
   — P : pour obtenir son année, il faut avoir une moyenne supérieure à $10/20$.
   — Q : pour obtenir son année, il suffit d'avoir une moyenne supérieure à 10/20.
2. (a) Donner la négation, puis la contraposée de :
   — Si tu échoues à tes examens, tu ne partiras pas en vacances.
   — Si une fonction est dérivable, elle est continue.

   (b) Si l'assertion : "si je ne peins pas mon portail en fer, il va rouiller" est vrai, peut on en déduire que : "si je le peins, il ne rouillera pas" ?

1.2 Manipulation de base

On considère les ensembles $A = \{0;5;7\}$, $B = [[4,7]]$ et $C = \{n \in [[0,7]]\, tq\; n \neq 1 \; et \; n \neq 4\}$
Conpléter les propositions suivantes avec le symbole adéquat :

1. A ... C
2. 5 ... A
3. 6 ... B
4. $\{2,5\}$ C

1. $\emptyset$ ... C
2. 3 ... B
3. $\{6\}$ ... B
4. $\{9\}$ ... C

1.3 Vraie ou faux

Soit A et B deux ensembles. Est ce que les propositions suivantes sont vraies ? Justifier.
$A \cap B \subset B$, $A \cup B \subset B$, $A \cap \bar{B} \subset A \cup B$.

1.4 Démontrer une inclusion

Soit A et B les ensembles suivants, montrer que $A \subset B$:

1. A est l'ensemble des entiers positifs multiples de 6 et B l'ensemble des entiers pairs.
2. A est l'ensemble des fonctions dérivables sur I un intervalle et $B = C^0(I)$.
3. A est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x = 1+y$, et $z = 1-y$ et B l'ensemble de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 1-xz = y^2 \;\; et \;\; x+z = 2\}$
4. Soient C et D des ensembles. Alors A est l'ensemble des sous parties de $C \cap D$ et B l'ensemble des sous parties de C.

1.5 Travailler la démonstration à l'aide de la définition

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E vérifiant $A \cap B = A \cup B$. Montrer que $A = B$. *(on utilisera la double inclusion, évidemment)*

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :
1. $A \subset B$ 2. $A \cap B = A$ 3. $A \cup B = B$
(On montrera $1 \to 2$, $2 \Rightarrow 3$ et $3 \Rightarrow 1$)

1.6 Travailler la démonstration à l'aide de la définition 2

Soient A et B des ensembles quelconques. Montrer que $A \cap \bar{B} = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$ *(on effectuera la preuve par double implication, évidemment)*

2 Formules de Morgan

On considère une suite de sous-ensembles $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ inclus dans un ensemble E.

1. Montrer que étant donnés A et B deux sous-ensembles de E, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.
2. En déduire que étant donnés A et B deux sous-ensembles de E, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier n non nul, $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

3 Inclusions

On considère une suite d'ensembles $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n=\bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \text{et} \quad U_n=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une relation d'inclusion entre les ensembles I_n et I_{n+1}. Même question avec les ensembles U_n et U_{n+1}.

4 Unions d'intersections

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Calculer :

1. $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$.
2. $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$ (utiliser la première question !)

5 Réunions et intersection dénombrables

Déterminer les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : 1. $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$. 2. $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$.

6 Propriétés sur les ensembles

Soit A, B ,C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$(\ (A\cap B)\subset(A\cap C) \text{ et } (A\cup B)\subset(A\cup C)\ )\Rightarrow B\subset C$$

7 (niveau 2)Travailler la démonstration à l'aide de la définition 3

Soient A, B et C des ensembles quelconques. Montrer que si $A\cup B=A\cap C$, $B\cup C=B\cap A$ et $C\cup A=C\cap B$ alors $A=B=C$

8 La fonction valeur absolue

Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et soit f l'application de E dans F qui à x associe $|x|$. Dire si f est injective ou surjective dans les cas suivants :

1. $E=\{-2,-1,0,1,2\}$ et $F=\{0,1,2\}$
2. $E=\{0,1,2\}$ et $F=\{0,1,2,3,4\}$
3. $E=F=[-1;1]$
4. $E=F=\mathbb{R}+$

9 Une application dans $\mathbb{R}^2$

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f(x,y)=(x+y,xy)$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

1. Trouver le(s) antécédent(s) du couple (3,2). L'application f est-elle injective ?
2. Est-elle surjective ?

10 Recherche de bijections réciproques

Pour les applications suivantes, démontrer qu'elles sont bijectives et déterminer l'application réciproque f^{-1} :

1. $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 2x+5\end{pmatrix}$ 2. $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x-y)\end{pmatrix}$ 3. $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z,y+2z,x+2z)\end{pmatrix}$

Montrer que l'application suivante ne peut pas être injective en cherchant les antécédants de $(0,0)$: $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z,x+y+z)\end{pmatrix}$

11 Composées et injectivité/surjectivité

Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective.
3. (niveau 2) Montrer le théorème suivant : Une application f définie d'un ensemble E dans F est une bijection de E vers F si et seulement si il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

12 Niveau 2 : Dans les entiers

Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{pmatrix}$ et $g : \begin{pmatrix} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ n-1 \text{ si } n \geq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$.

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

13 Application bijectives définie par morceaux (si temps)

Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ si } 0 < x < 1 \\ x-1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$ et $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x \text{ si } x < 0 \\ x+1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \end{pmatrix}$.

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Commenter le résultat.

14 Défi 1

Soit A une parti d'un ensemble E.On pose $\phi : \begin{cases} P(E) & \to & P(A) \times P(\bar{A}) \\ M & \mapsto & (A \cap M, \bar{A} \cap M) \end{cases}$

1. Justifier que ϕ est injective.
2. Faire de même pour la surjectivité.
3. Que peut on dire pour ϕ ? Donner la bijection réciproque ?

15 Défi 2

On considère E, F et G 3 ensemble et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Soit $phi : E \to F \times G$ définie par $\phi(x) = (f(x), g(x))$

1. Montrer que si f ou g est injective alors phi est injective.
2. Montrer que si phi est surjective alors f et g le sont aussi.
3. Montrer que les réciproques sont fausses.