HEC ECS 1 : Les suites numériques, niveau 1 :

Robin Loris

1 Vrai ou Faux

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
2. Si une suite n'est pas convergente, alors elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
3. Si la suite (u_n) est convergente, alors il en est de même de (u_{2n+1}).
4. Toute suite non majorée diverge.
5. Si une suite positive est décroissante, alors elle est convergente.
6. Si une suite positive est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

2 Étude de suites

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n} + 2$.

Soit f la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{3}{x} + 2 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la suite est bien définie. (on pourra montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in$).
2. Résoudre l'équation $f(L) = L$ (on notera $a < b$ les solutions).
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq b$.
4. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - a}{u_n - b}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis que la suite (u_n) converge, et enfin donner sa limite.

3 Études de convergence

Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3-n}{\sqrt{n+1}+n}$
2. $u_n = n - \sqrt{n^2+4}$ (on utilisera la quantité conjugué)
3. $u_n = \dfrac{2^{n+1} + (-3)^{n+1}}{3^n + 5^n}$
4. $u_n = \lfloor -\dfrac{200}{n} \rfloor$ (on utilisera la limite de $\rfloor x \lfloor$ quand $k \to 0^-$).
5. $u_n = 8n + (-1)^n n^2$ (on regarde la limite de u_{2n} et u_{2n+1}).
6. $u_n = \sqrt[n]{n}$ (on écrire la forme exponentielle de u_n)
7. $u_n = \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$ avec $a > b > 0$
8. $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 7}{2}$ (on exprimera u_n en fonction de n)

4 Une suite auxiliaire de la suite auxiliaire

On considère la suite définie par la récurrence :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 4n + 3$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite v définie pour tout entier n par $v_n = u_n + \alpha n$.

1. Déterminer α afin que v soit une suite arithmético-géométrique.
2. Expliciter u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (bonus) Que faire dans le cas $u_{n+1} = u_n - 4n + 3$?

5 Avec des parties entières

Soit a un réel tel que $a > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n}{\lfloor an \rfloor}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie. (il s'agit de vérifier que $\lfloor an \rfloor \neq 0$ c'est à dire ....)
2. Former un encadrement de u_n (on utilisera un encadrement de $\lfloor an \rfloor$) et en déduire la convergence de la suite (u_n).

6 Suite définie par récurrence

Soit (u_n) la suite de nombres réels qui vérifie $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que cette suite est positive.
2. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite. (on étudiera son sens de variation)

7 Limites de sommes

Déterminer la limite de la suite v définie par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ grâce à un encadrement.

8 Une propriété bien utile :

Soit $l \in$ et $k \in]0,1[$.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle vérifiant la relation $\forall n \in$, $|u_{n+1} - l| \leqslant k|u_n - l|$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in$, $|u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l|$.
2. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} l$.

9 Approximations et suites adjacentes

On considère les suites (S_n) et (T_n) définies pour tout entier non nul par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $T_n = S_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

1. Montrer que (S_n) et (T_n) sont adjacentes. On note L leur limite commune.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|L - \dfrac{S_n + T_n}{2}| \leq \dfrac{T_n - S_n}{2}$. (Indice : on utilisera l'inégalité triangulaire sur $|\dfrac{L - S_n}{2} + \dfrac{L - T_n}{2}|$).
3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2n \times n! \geq 10^3$ (calculer les premiers termes). En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de L.

10 Avec la définition

1. Soit (u_n) une suite réelle. Rappeler la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $(\ln n)^{12} \leq n^{0,4}$.

11 Comparaison de moyennes

Soit a et b deux réels, avec $0 < a < b$. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_0 = a, \quad V_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq U_n \leq b$ et $a \leq V_n \leq b$. (on montrera les deux propriétés lors d'une même récurrence)
2. Soit x et y deux réels positifs. Montrer que $2\sqrt{xy} \leq x + y$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$.
3. Déduire de la question précédente que (U_n) est une suite croissante et que (V_n) est une suite décroissante.
4. Montrer enfin que (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

12 Calculs de limites

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $u_n = n^{1000} - 1,01^n$ 2. $u_n = \dfrac{2^n + n^{20}}{2^n + 3^n + 12}$ 3. $u_n = \dfrac{10^n + 4^{2n}}{2^n + 5^n}$ 4. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$

13 Encore une étude de suites définie par récurrence

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par son premier terme $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie et à valeurs positives.
2. Etudier la fonction $h(x) = \ln(1 + x) - x$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante.
4. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

14 Toujours des suites définies par récurrence

On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + n x_n^2}$.

1. Montrer que tous les termes de la suite (x_n) sont strictement positifs.
2. En déduire que (x_n) est strictement décroissante, puis convergente.
3. Soit a la limite de (x_n). Supposons $a > 0$, quelle est alors la limite de la suite $\left(\dfrac{x_n}{1 + n x_n^2}\right)$? En utilisant la relation de récurrence qui définit (x_n), montrer que le cas $a > 0$ est impossible.
4. En conclusion, quelle est la limite de (x_n) ?

15 (Niveau 2) : Très court extrait d'une épreuve "ECRICOME"

Soit (u_n) une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_{n-1}) = 0$. Justifier qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geq N_0$, alors $u_n \geq u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

16 La moyenne des n premiers termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de limite l. On définit la suite v par son terme général :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Montrer que v est croissante.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$ et en déduire que v est bornée, puis convergente.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

17 Limite d'une somme et approximation

Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que S_n converge vers un réel L.
3. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de L.

18 (facultatif)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

19 (facultatif)

En utilisant le théorème de convergence monotone, montrer que la suite u définie par
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2n+2k-1}$ est convergente. Trouver un encadrement de la limite de la suite u.