

HEC ECS 1 : Les systèmes linéaires, niveau 2 :

1 À deux inconnues

Résoudre les systèmes suivants, dans \mathbb{R}^2 :

$$(a) \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad (b) \{ 3x - 3y = -1 \} \quad (c) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x - y = 3 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$$

2 À trois inconnues

Résoudre les systèmes suivants, dans \mathbb{R}^3 :

$$(a) \begin{cases} x - 3y + 5z = -1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 3x - 3y + z = -1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

3 À quatre inconnues

Résoudre le système suivant d'inconnues réelles x, y, z, t :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - t = 0 \\ -x + 2y - z + 3t = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$$

4 Avec un paramètre

Soit $k \in \mathbb{R}$ un paramètre et le système suivant d'inconnues réelles x et y : $\begin{cases} 4x - ky = -1 \\ kx - 4y = 1 \end{cases}$

1. Pour quelles valeurs de k ce système est-il un système de Cramer ? Résoudre le système dans ce cas.
2. Résoudre le système dans les autres cas.

5 Un cas général

Soit a, b, c trois paramètres réels.

1. A quelle condition portant sur a, b et c le système suivant d'inconnues réelles x, y, z admet-il des solutions ?

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

2. Donner l'ensemble des solutions dans les deux cas suivants : $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ et $(a, b, c) = (1, -2, 1)$.

6 Que pensez vous de ... ?

1. Résoudre le système suivant dans \mathbb{R}^3 : $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

2. Que pensez-vous de ceci ? $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z & (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ x = y & (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\ y = z & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$

7 Niveau 1 : Encore un système avec un paramètre

Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x, y, z , en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 4z = 0 \\ 3x - (4+\lambda)y + 12z = 0 \\ x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

8 Niveau 2 : Encore un système avec un paramètre

Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x, y, z , en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lambda x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ \lambda x + \lambda y + z = 1 \end{cases}$$

9 Niveau 1 : Encore des systèmes

Résoudre les systèmes suivants : (a) $\begin{cases} -2x + y + z = -1 \\ 3x - y + 3z = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 2y - z = -1 \\ -5x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$

10 Niveau 2 : Quelques systèmes non linéaires

Résoudre les systèmes suivants : (a) $\begin{cases} \frac{2}{5x+2y} + \frac{7}{7x+3y} = 7 \\ \frac{1}{5x+2y} + \frac{3}{7x+3y} = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 y^3 = 2^z \\ \frac{x}{y} = 8^z \\ \frac{x^3}{y^2} = 2^8 \end{cases}$

11 Des applications

1. (a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $x \notin \{1; -3\}$:

$$\frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

(b) En déduire une primitive de $f : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}$.

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = 4x^3$.

(b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de :

$$\sum_{k=0}^n k^3$$

12 Une devinette

J'ai 3 fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, ensemble nous aurons 98 ans. Quel est mon âge ?