HEC ECS 1 : Limites et continuité, niveau 1 :

1 Limites au bord de l'ensemble de définition

Dans les cas suivants, donner le domaine de définition D_f de la fonction f et déterminer les limites aux bornes de D_f.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 3}{x^3 - 1}$ (2) $f(x) = \ln(1+x) - \ln(x)$ (3) $f(x) = x^{1/x}$ (4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

(5) $f(x) = x + \cos(x)$ (6) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ (7) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ (8) $f(x) = \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

Indice : pour le 3, on rappelle que $a^b = exp(...)$, pour le 7 en 1, donner la limite de $\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ et pour le 8, en 0 (+ ou −) poser le changement de variables $X = \dfrac{1}{x}$.

2 Prolongement par continuité

1. Les deux fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}+^*$. Etudier leur limite en 0. En déduire si on peut les prolonger par continuité en 0. Si oui, effectuer ce prolongement.
   $f(x) = x\ln(x)$; $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$
2. Les deux fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}^*$. Etudier leur limite en 0. En déduire si on peut les prolonger par continuité en 0. Si oui, effectuer ce prolongement.
   $f(x) = x^3 \cos\left(\dfrac{3}{x}\right)$; $g(x) = xe^{1/x}$

3 Une question générique

Soit f et g deux fonctions définies sur $I = \mathbb{R}$. On suppose que f est bornée et que g a pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Montrer que $|f(x)g(x)| \leqslant K|g(x)|$ pour tout $x \in$.
En déduire que la fonction fg a pour limite 0 en $+\infty$.

4 Des calculs de limites

Déterminer les limites suivantes (si elles existent) : (attention, on rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$)

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ (3) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ (4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

5 Avec la partie entière

Rappel : la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel x.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{7}\lfloor \dfrac{3}{x} \rfloor$.

Préambule : montrer que pour tout $x \in$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{3}{7} - \dfrac{x}{7} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{7}$.
   En déduire que f admet une limite à droite en 0.

2. Montrer de même que f admet une limite à gauche en 0.
3. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

6 Une question générique

Trouver une fonction f réelle telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ (regarder les fonctions affines)
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \pi$ (regarder les fonctions affines)
3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$ (chercher $f(x)$ sous la forme $x + g(x)$)
4. $f(x) - x$ n'a pas de limite de $+\infty$ (chercher $f(x)$ sous la forme $x + g(x)$)

7 Asymptotes

Trouver le domaine de définition et toutes les asymptotes des fonctions définies par les formules :

$(1)\ f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$ $\quad ((niveau2) : 2)\ f(x) = (x^2 - x - 2)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad (3)\ f(x) = x\ln(x)$ $\quad (4)\ f(x) = \frac{x^2+x-3}{x-1}$

8 Asymptotes 2

Autre méthode pour $f(x) = \frac{x^2+x-3}{x-1}$: montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x > 1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$.

9 Calculs de limites

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)(\sqrt{x+1}-1)}{x^2+3x}$ (indice : pensez à la quantité conjuguée) et $\lim_{x\to 0} \frac{(x+\pi)\tan x}{x\cos x}$.
2. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ (Indice : posez $X = 2x$), $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x)-1}{x^2}$ (Indice : posez $X = -x$) et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{4x}$ (Indice : posez $X = x^2$).
3. Trouver la limite de $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$ en 0. Après avoir constaté que c'est une forme indéterminée, remarquer que $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{x^2}{1-\cos(x)}$ et conclure.
4. Déterminer $\lim_{x\to 2} \frac{|x^2-4|}{2-x}$ (Indice : distinguez en 2^+ et 2^-) et $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+7}-3}$. (Indice : pensez à la quantité conjuguée).
5. Le but est de déterminer $\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x$. Commencer par voir ce que vous répondriez sans les indications qui suivent...

   (a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$ en remarquant que $x\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$.

   (b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x$.

10 Niveau 1 :

On considère la fonction f définie sur par $f(x) = ln(e^x+1)$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$. Qu'en déduit on ?

11 Niveau 2 : Une équation fonctionnelle

Soit f une fonction définiesur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f(\frac{x}{2})$ et f est continue en 0.
Montrer que f est constante, on pourra pour cela montrer que $f(\frac{x}{2^n}) = f(x)$.

12 Niveau 1 :

Donner les limites en x_0 des expressions suivantes :

1. $ln(x) + x$ avec $x_0 = +\infty$
2. $xexp(1/x) - x$ avec $x_0 = +\infty$
3. $\frac{sin(x^2) - x^2}{ln(2x) - x}$ avec $x_0 = +\infty$.
4. $xln(xe^{1/x})$ avec $x_0 = 0^+$.
5. $(1 + \frac{2}{x^2})^{x+x^2}$ avec $x_0 = +\infty$.
6. $\frac{sin(4x)^2}{xsin(x)}$ avec $x_0 = 0$.

13 Niveau 2 :

Donner la valeur de $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2 - (x - \lfloor x \rfloor)}$

14 (Facultatif)

Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - \sin(5x)}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(5x)}{x}$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x) - \tan(5x)}{x}$