HEC ECS 1 : Généralités sur les fonctions, niveau 2 :

Les inéquations et les équations

Exercice 1

On considère une fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. Donner son ensemble de définition.
2. Trouver ses points fixes (les x tels que $f(x) = x$).
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 < f(x) \leqslant 1$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $ln(x+2) + ln(x-2) = ln(45)$
2. $5^{sin(x)} + \dfrac{2}{5^{sin(x)}} = 3$
3. $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0$
4. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $\forall x \in [0;\pi]$, $sin(x) \leqslant x$ et que $cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.
2. Donner le domaine de définition et étudier le signe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-5}$ puis (niveau 2) de $g(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-5|}$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}} \geqslant 1$.

Exercice 4

Soit f une fonction de domaine définition égal à $\mathcal{D}_f = [-2;2]$ et g la fonction définie par $g(x) = f(x) - f(x-1)$. Donner le domaine de définition de la fonction g.

La parité

Exercice 5

1. Montrer que si f est impaire sur $D_f = \mathbb{R}$, alors $f(0) = 0$.
2. Montrer que si f est impaire, alors $g = |f|$ est paire.
3. Montrer que si f est impaire, alors $(h: \ x \mapsto xf(x))$ est paire.
4. Donner la négation de la phrase :"la fonction est paire ou est croissante".
5. Sans soucier de la dérivabilité, calculer $(f(-x))'$ puis en déduire un lien (logiquement bien écrit) entre parité de f et de f'.

Exercice 6

Pour les deux fonctions suivantes, donner leur domaine de définition puis montrer qu'elles ont une propriété de parité (donner également le tableau de variations de la (1)) : $(1)\ \ f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad (2)\ \ f : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (niveau 2)

Exercice 7

Montrer qu'une fonction paire de domaine de définition égal à $\mathbb{R}$ n'est pas bijective.
Peut-on dire quelque chose lorsque la fonction est impaire ?

Les bornes inf et sup

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$.
Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f puis étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
Déterminer $f([0,1])$ puis, s'ils existent, $\inf\limits_{[0,1]}(f)$, $\sup\limits_{[0,1]}(f)$, $\min\limits_{[0,1]}(f)$, $\max\limits_{[0,1]}(f)$.

Exercice 9

On donne une fonction f définie sur un intervalle I.
Déterminer $f(I)$ puis, s'ils existent, $\inf\limits_{I}(f)$, $\sup\limits_{I}(f)$, $\min\limits_{I}(f)$, $\max\limits_{I}(f)$.

$(1)\ \ f : x \mapsto x + \dfrac{4}{x+3}$ $, I = [-2;3]$ $\quad (2)\ \ f : x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$ $, I = [-1;2[$

$(3)\ \ f : x \mapsto |x(x-1)|$ $, I =]\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}[$

Bijections et bijections réciproques

Exercice 10

Les fonctions suivantes sont-elle bijectives ? Justifier en vous aidant du graphe ou du tableau des variations de la fonction. Pour la (1), donner la bijection réciproque.

$(1) f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x+7 \end{pmatrix}$ $(2) f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{pmatrix}$ $(3) f : \begin{pmatrix} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{pmatrix}$

$(4) f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ si } 0 < x < 1 \\ x-1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$ $(5) f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x \text{ si } x < 0 \\ x+1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \end{pmatrix}$

Exercice 11 : (niveau 1)

On considère f définie par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ Montrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et donner sa bijection réciproque.

Exercice 11 : (niveau 2)

On considère f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ Montrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donner sa bijection réciproque.

Les études complètes de fonctions

Exercice 12 :

Faire l'étude complète de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 - cos(x)}$

Exercice 13 : (niveau 1)

Soit f une fonction définie pour tout $x \in]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2} ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

1. La fonction f est elle impaire ? Faire une étude complète de la fonction f.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(x) = y \Longleftrightarrow 1+x = e^{2y}(1-x) \Longleftrightarrow x(1+e^{2y}) = e^{2y} - 1$.
3. En déduire la bijection réciproque de f.
4. Montrer que f^{-1} peut s'écrire comme quotient des deux fonctions que l'on notera $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ tel que $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire une expression de $\sqrt{ch(x)^2 - 1}$ en fonction de $sh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 13 : (niveau 2)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-1,1[$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \in]-1,1[$ $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

1. f' est elle une fonction impaire ? paire ?

2. Montrer par l'absurde que f ne peut pas être paire.
3. Montrer que la fonction F définie sur $]-1,1[$ par $F(x) = xf(x) + \frac{1}{2}ln(1-x^2)$ est une primitive de f.
4. Trouver a et b tels que pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$
5. En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
6. La fonction f est elle impaire ? Faire une étude complète de la fonction f.
7. Trouver la bijection réciproque de f.
8. Montrer que f^{-1} peut s'écrire comme quotient des deux fonctions que l'on notera $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ tel que $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
9. En déduire une expression de $\sqrt{ch(x)^2 - 1}$ en fonction de $sh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Les défis

Défi 1 :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{e^x}$ et soir E l'ensemble des fonctions f définies sur $]1;+\infty[$ vérifiant $f(x) = f(x^2)$ pour tout $x > 1$.

1. E est il l'ensemble vide ?
2. Soit f un fonction définie sur $]1;+\infty[$. Montrer que f appartient à E si et seulement si $f \circ h$ est $ln(2)$-périodique.

Défi 2 :

Soit a un réel strictement positif. On note P_a la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_a(x) = x^3 + ax - 1$ et on admet que l'équation $P_a(x) = 0$ admet une unique solution réelle. On note cette solution $u(a)$ et on considère alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui à un réel a associe cette solution $u(a)$.

1. En comparant $P_a(u(a))$ et $P_a(0)$, montrer que $\forall a > 0$, $u(a) > 0$.
2. Montrer que $\forall a, b > 0$, $P_a(u(b)) = (a-b)u(b)$
3. en déduire le sens de varaition de u.