HEC ECS 1 : Sommes-Produits-Récurrence-Binôme

Exercice 1

1. Calculer : $A = \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{k+1}$, $B = \sum_{i\in[[23;34]]} 2$, $C = \prod_{j=1}^{5} \frac{1}{j}$.
2. Ecrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$ puis les calculer :
   $13+\cdots+22$; $310+320+330+\cdots+460$; $2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{13}$.

Exercice 2

Calculer en fonction de n entier supérieur ou égal à 2 :
$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} i$; $B_n = \sum_{i=1}^{n-1} 5^{-i}$; $C_n = \sum_{i=0}^{2n+1} 3^i$; $D_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{-2i}$; $E_n = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)$ et $F_n = \sum_{i\in\{0\ldots n-1\}} i+1$; $G_n = \sum_{i=0}^{2n} 2i$

Exercice 3

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ?
1. $\sum_{k=1}^{n} (\lambda + a_k) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} a_k$? 2. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$? 3. $\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k) = \lambda(\sum_{k=1}^{n} a_k)$?
4. $\sum_{k=1}^{n} (a_k)^\lambda = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^\lambda$? 5. $\sum_{k=1}^{n} (a_k b_k) = (\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{k=1}^{n} b_k)$?

Exercice 4 : sommes téléscopiques

1. Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et n, m deux entiers tels que $n \leq m$.
   Montrer que $\sum_{i=n}^{m} (a_{i+1} - a_i) = a_{m+1} - a_n$.
2. En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, calculer $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   puis *retrouver* (on fait donc semblant d'ignorer le résultat) la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$.

Exercice 5

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$ de deux manières :
1) par récurrence.
2) directement en remarquant que $k = (k+1) - 1$, donc $k \times k! = ((k+1)-1) \times k! = \cdots$. Faire apparaitre une somme télescopique.

Exercice 6

Simplifier les expressions suivantes, où $x \neq 1$ est un réel :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} kx^{k-1}$, pour cela on calculera la dérivée de la première expression de deux manières différentes.
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} kx^k$

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul. Simplifier au maximum les écritures suivantes :
$A_n = \dfrac{(n+1)!}{n!}$; $B_n = \dfrac{(n+1)!-n!}{n}$; $C_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n.n!}$

Exercice 8

Calculer en fonction de n entier supérieur ou égal à 2 :
$\sum\limits_{i=1}^{n-1}(2i+1)$; $\sum\limits_{i\in[[1;n]]}(3n-2i)$; $\sum\limits_{i=1}^{n} 5^i 2^{3i-2}$; $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}$; $\prod\limits_{i=1}^{n} n$; $\prod\limits_{i\in[[2;n]]}(1-\dfrac{1}{i})$; $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\dfrac{1}{i})$.

Exercice 9

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ?
1. $\prod\limits_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$? 2. $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k \prod\limits_{k=1}^{n} b_k$? 3. $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k + \prod\limits_{k=1}^{n} b_k$?

Exercice 10

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier que : $\binom{2n+2}{n+1} = 2\dfrac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \geq 2^n$. (on utilisera, après l'avoir justifier, le fait que $\dfrac{2n+1}{n+1} \geqslant 1$)

Exercice 11

Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une série statistique (les x_i sont des réels). On note $\bar{x}$ et V_x la moyenne et la variance de cette série.

1. Démontrer que $V_x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$. (on rappelle que $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ et que $V_x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
2. Soit a et b deux constantes (des réels). On considère la nouvelle série statistique $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, $y_i = ax_i + b$. Déterminer la moyenne $\bar{y}$ et la variance V_y en fonction de a, b, $\bar{x}$ et V_x.

Exercice 12

Trouver deux réels α et β tels que pour tout entier $k \geq 1$, on ait $\dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{\alpha}{2k+1} + \dfrac{\beta}{2k-1}$, puis calculer $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4k^2-1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ (on constatera que $4x^2 - 1 = (2k+1)(2k-1)$)

Exercice 13

Lecture préliminaire : Pour cet exercice, il est indispensable d'avoir bien compris la notation : a^{2^n}. Prenons par exemple $a = 2$ et $n = 3$. 2^{2^3} est égal à $2^{(2^3)}$ soit 2^8. Les parenthèses clarifient les choses mais peuvent être omises pour alléger les écritures. Il ne faut donc pas confondre 2^{2^3} avec $(2^2)^3$! !

Soit a un réel strictement positif et $(q_n)_{n>0}$ la suite de réels définie par

$$q_1 = 1 + a^2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ q_{n+1} = (1 + a^{2^{n+1}})q_n$$

1. Dans le cas particulier où $a = 1$, donner l'expression de q_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Dans le cas général, calculer et développer q_2 et q_3.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 - a^2)q_n = 1 - a^{2^{n+1}}$.
4. En déduire une expression de q_n sous forme de somme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (*indication* : écrire $a^{2^{n+1}}$ sous la forme d'une puissance de (a^2), on rappelle que $2^{n+1} = 2^n \times 2$)

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les sommes $S_n = \sum\limits_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $T_n = \sum\limits_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.

1. Comprenez-vous la notation ? Essayez de calculer S_4 et T_4.
2. Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ à l'aide de S_n et T_n. (indice : écrire avec des "..." les expressions de $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$)
3. En déduire S_n et T_n en fonction de n (sans le symbole $\sum$).

Exercice 15

Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ (indice : montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{k-1}{n-1}$)

Exercice 16

1. Dans le développement de $(a+b)^9$, quel est le coefficient de a^6b^3 ? de a^5b^5 ?
2. Dans le développement de $(a+b+c)^{10}$, quel est le coefficient de a^{10} ? de $a^6b^2c^2$? de a^5b^5c ?

Exercice 17

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$.

Niveau 1, exercice 0 :

Réduire les expressions suivantes : $\dfrac{6!}{3!}, \dfrac{n!}{(n-2)!}, \dfrac{n!+n}{n}, \binom{n}{n-3} + \binom{n}{2}$.

Niveau 1, exercice 1 :

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n+1} nk; \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 4^k; \quad \sum_{k=1}^{n+3} ln(k+1) - ln(k); \quad \sum_{k=1}^{n+3} k^2 - k; \quad \sum_{k=0}^{n+1} n \times 4^k + 2$$

Niveau 1, exercice 2 :

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2 + k; \quad \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}; \quad \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} 2^k; \quad \sum_{k=2}^{n-1} 2^k$$

Niveau 1, exercice 3 :

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=2}^{n-1} (n+1)k; \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n+1-k} 2^{k+1}; \quad \sum_{k=1}^{n+1} e^{k-1} - e^k; \quad \sum_{k=2}^{n-1} e^{2k}$$

Niveau 1, exercice 4 :

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n+1} ln(2^k); \quad \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} e^{k+n}; \quad \sum_{k=1}^{n+3} cos(k-1) - cos(k); \quad \sum_{k=0}^{n+1} (a+b)^{n-k}$$

Niveau 2, exercice 0 :

On veut définir une suite par un premier terme et une relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.

1. On pose $U_0 = -\frac{1}{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n - 1}$.
   Déterminer les premiers termes et constater qu'on n'a pas défini de suite.
2. On pose $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \sqrt{1 - U_n}$.
   Montrer que pour tout entier n, le terme U_n existe et est dans l'intervalle $[0,1]$.

Niveau 2, exercice 1 :

Peut-on définir une suite de la façon suivante : $U_0 = 1$, $U_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = 2U_{n+1} + \frac{1}{U_n}$?

Niveau 2, exercice 2 :

Calculer les sommes suivantes en les réduisant au maximum :

1. $\sum_{k=1}^{100} \sum_{i=0}^{k} 2^i$
2. $\sum_{k=1}^{10} \ln\left(\frac{i}{i+1}\right)$

Niveau 2, exercice 3 :

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.
Calculer c_1, c_2, c_3 puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \geq 2^{n-1}$.

Niveau 2, exercice 4 :

1. Soit $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$, calculer $\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$.
2. Soit $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, justifier que $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.
3. On rappelle que $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{i-1} x_{i,j}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$, réduire les sommes doubles suivantes :
   — $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$
   — $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} min(i,j)$
4. On considère une suite de réels $(x_i)_i$. Montrer que $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = \frac{1}{2}\left((\sum\limits_{i=1} x_i)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$

Niveau 2, exercice 5 :

On définit une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par récurrence de la façon suivante : $H_0(x) = 1$; $H_1(x) = 2x$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $H_{n+2}(x) = xH_{n+1}(x) - 3x^2 H_n(x)$. Calculer $H_2(x)$ et $H_3(x)$ puis montrer que pour tout entier n, H_n est un polynôme.