HEC ECS 1 : Nombres réels, niveau 2 :

Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $|4-7x| = 2$
2. $|3x+2|+|3-4x| = 0$
3. $|x^2+x+1| = |-x^2+4|$
4. $|-3x+3| \leq 2$
5. $|2x-8| \geq 2$
6. $|2x-8| \geq -1$
7. $1-2ln(x) \geqslant 0$ et $2ln(x)-4ln(3) \leqslant 0$
8. $exp(x-1) < 1$, $-exp(x)-2 > 0$,$2exp(x)+4 \geqslant 4$
9. $(\frac{1}{2})^n \leqslant 10^{-5}$
10. $cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$
11. $cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur
12. $cos(x) = 1$, $cos(x) = 0$, $cos(x) = -1$, $sin(x) = 1$, $sin(x) = 0$, $sin(x) = -1$ sur
13. $cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$
14. $cos(3x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}]$
15. $\sqrt{x} \geqslant 2$
16. $\sqrt{x} \leqslant 9$
17. $x^2-3 \leqslant 0$
18. $(x-1)^2 \geqslant 3$
19. $\frac{1}{x} \geqslant 3$ et $\frac{1}{x} \leqslant 3$
20. $\frac{1}{x} > -2$ et $\frac{1}{x} \leqslant -2$
21. $x^4 \leqslant 16$ et $x^4 \geqslant 81$
22. $x^5 \leqslant 4\sqrt{2}$ et $x^3 > -8$

Exercice 2

Soit $x, y \in \mathbb{R}$: montrer les affirmations suivantes à l'aide des inégalités triangulaires :

1. Si $|x| \leqslant 4$ alors $|x+7| \leqslant 11$.
2. Si $|x+y| \geqslant 6$ et $2 \leqslant |x| \leqslant 3$ alors $y \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$.
3. (niveau 2) Si $u_n = |ln(n) - e^{-n}|$ alors $|u_{n+1} - u_n| \to 0$ quand $n \to +\infty$
   (on pourra montrer que $0 \leqslant |u_{n+1} - u_n| \leqslant |ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + e^{-n}(1-e^{-1}\right)|$)

Exercice 3, niveau 2 :

On considère la relation suivante sur les nombres réels : x est en relation avec y de niveau ε si on peut trouver un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $|x-y| \leqslant \varepsilon$.

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$ x est en relation avec lui même de niveau ε.
2. Montrer que si x est en relation avec y de niveau ε alors y est en relation avec x de niveau ε.
3. Montrer que si x est en relation avec y de niveau ε et y en relation avec z de niveau ε' alors x est en relation avec z de niveau $\varepsilon + \varepsilon'$.

Exercice 4

On considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $|x-2| \geq |x-3| \quad (*)$
Plusieurs méthodes sont proposées pour la résoudre.

1. On raisonne par disjonction des cas pour pouvoir enlever les valeurs absolues. Quels sont les trois cas de figure à envisager ? En déduire l'ensemble des solutions.
2. Montrer que, pour tous réels x et y, on a : $|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $(*)$.
3. Représenter graphiquement des fonctions : $x \mapsto |x-2|$ et $x \mapsto |x-3|$. Retrouver graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $(*)$.

Exercice 5

Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$ on a : $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

Exercice 6

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$ pour tout entier n non nul.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{2+\frac{1}{n}}$.
2. Peut-on en déduire quelque chose sur la convergence de la suite (u_n) ? Montrer que (u_n) est bornée.

Exercice 7

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ pour tout entier n non nul. Montrer grâce à un encadrement que cette suite converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 8

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que $n! \leq n^n$.

   Dans la suite de cet exercice, on établit une majoration moins grossière de $n!$ *(et aussi une minoration).*

2. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(n+1-k) = n!$
3. Montrer $\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k(n+1-k)} = n!$
4. Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \geq 1$ et $y \geq 1$, on a $x+y-1 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.
5. En déduire pour tout entier k compris entre 1 et n, un encadrement de $k(n+1-k)$.
6. Montrer enfin que $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Exercice 9

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
2. En déduire la partie entière de $a = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 10 , niveau 2

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $\mathrm{Ent}(x) + \mathrm{Ent}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \mathrm{Ent}(2x)$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Ent}\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 11

Déterminer pour les parties de $\mathbb{R}$ suivantes si elles sont majorées, minorées, si elles admettent une borne supérieure, une borne inférieure, si elles admettent un maximum, un minimum.

(niveau 1) A=$]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, 1]$.   (niveau 1) B= $]0,1] \cup \{-2\}$.   C= $\left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.   D= $\{(-1)^n n, n \in \mathbb{N}\}$.

E= $\left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.   F= $\{\exp(x), x \in \mathbb{R}\}$.

Les deux derniers cas pour le niveau 2

G= $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.   H= $\left\{x + \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}+^*\right\}$.