

HEC ECS 1 : Nombres réels, niveau 1 :

Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $|4 - 7x| = 2$
2. $|3x + 2| + |3 - 4x| = 0$
3. $|x^2 + x + 1| = |-x^2 + 4|$
4. $|-3x + 3| \leq 2$
5. $|2x - 8| \geq 2$
6. $|2x - 8| \geq -1$
7. $1 - 2\ln(x) \geq 0$ et $2\ln(x) - 4\ln(3) \leq 0$
8. $\exp(x - 1) < 1$, $-\exp(x) - 2 > 0$, $2\exp(x) + 4 \geq 4$
9. $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-5}$
10. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$
11. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur
12. $\cos(x) = 1$, $\cos(x) = 0$, $\cos(x) = -1$, $\sin(x) = 1$, $\sin(x) = 0$, $\sin(x) = -1$ sur
13. $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$
14. $\cos(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$
15. $\sqrt{x} \geq 2$
16. $\sqrt{x} \leq 9$
17. $x^2 - 3 \leq 0$
18. $(x - 1)^2 \geq 3$
19. $\frac{1}{x} \geq 3$ et $\frac{1}{x} \leq 3$
20. $\frac{1}{x} > -2$ et $\frac{1}{x} \leq -2$
21. $x^4 \leq 16$ et $x^4 \geq 81$
22. $x^5 \leq 4\sqrt{2}$ et $x^3 > -8$

Exercice 2

Soit $x, y \in \mathbb{R}$: montrer les affirmations suivantes à l'aide des inégalités triangulaires :

1. Si $|x| \leq 4$ alors $|x + 7| \leq 11$.
2. Si $|x + y| \geq 6$ et $2 \leq |x| \leq 3$ alors $y \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$.
3. (niveau 2) Si $u_n = |\ln(n) - e^{-n}|$ alors $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$
(on pourra montrer que $0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq |\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + e^{-n}(1 - e^{-1})|$)

Exercice 3, niveau 2 :

On considère la relation suivante sur les nombres réels : x est en relation avec y de niveau ε si on peut trouver un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $|x - y| \leq \varepsilon$.

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$ x est en relation avec lui-même de niveau ε .
2. Montrer que si x est en relation avec y de niveau ε alors y est en relation avec x de niveau ε .
3. Montrer que si x est en relation avec y de niveau ε et y en relation avec z de niveau ε' alors x est en relation avec z de niveau $\varepsilon + \varepsilon'$.

Exercice 4

On considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : |x - 2| \geq |x - 3|$ (*)

Plusieurs méthodes sont proposées pour la résoudre.

1. On raisonne par disjonction des cas pour pouvoir enlever les valeurs absolues. Quels sont les trois cas de figure à envisager ? En déduire l'ensemble des solutions.
2. Montrer que, pour tous réels x et y , on a : $|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$ (indice : $\sqrt{x^2} = \dots$). En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (*).
3. Représenter graphiquement des fonctions : $x \mapsto |x - 2|$ et $x \mapsto |x - 3|$ (indice : la courbe de la fonction f et la courbe de la fonction définie par $g(x) = f(x - 2)$ sont semblables, ...). Retrouver graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation (*).

Exercice 5

Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$ on a : $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$ (on montrera 3 inégalités, et pour l'une d'entre elle, on utilisera le développement de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$)

Exercice 6

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+2k-1}$ pour tout entier n non nul.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4 - \frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$. (on encadrera le plateau : pour tout $k \in [[1, n]]$... $\leq \frac{1}{2n+2k-1} \leq \dots$, puis on utilisera le corollaire 1.3).
2. Peut-on en déduire quelque chose sur la convergence de la suite (u_n) ? Montrer que (u_n) est bornée.

Exercice 7

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$ pour tout entier n non nul. Montrer grâce à un encadrement que cette suite converge vers une limite que l'on précisera. (on reprendra le dérouler de l'exercice 6).

Exercice 8

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que $n! \leq n^n$.

Dans la suite de cet exercice, on établit une majoration moins grossière de $n!$ (et aussi une minoration).

2. Montrer que $\prod_{k=1}^n (n+1-k) = n!$ (on écrira le produit avec des "... " ou alors on effectuera un changement de variable bien choisis)
3. Montrer $\prod_{k=1}^n \sqrt{k(n+1-k)} = n!$ (on utilisera les propriétés des produits et puissances)
4. Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \geq 1$ et $y \geq 1$, on a $x+y-1 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. (pour l'inégalité de gauche, on développera $(x-1)(y-1)$)
5. En déduire pour tout entier k compris entre 1 et n , un encadrement de $k(n+1-k)$. (on appliquera la formule de la question précédente avec un bon choix de x et de y (attention, il ne faut pas oublier les conditions sur x et y)).
6. Montrer enfin que $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Exercice 9

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. (utiliser la méthode de la quantité conjuguée pour transformer les expressions à gauche et à droite du produit).
2. En déduire la partie entière de $a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$. (on sommera l'inégalité précédente, puis on regardera la définition de la partie entière)

Exercice 10 , niveau 2

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $\text{Ent}(x) + \text{Ent}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \text{Ent}(2x)$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^n \text{Ent}\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 11

Déterminer pour les parties de \mathbb{R} suivantes si elles sont majorées, minorées, si elles admettent une borne supérieure, une borne inférieure, si elles admettent un maximum, un minimum.

$$\text{(niveau 1) } A =]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, 1]. \quad \text{(niveau 1) } B =]0, 1] \cup \{-2\}. \quad C = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad D = \{(-1)^n n, n \in \mathbb{N}\}.$$

$$E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}. \quad F = \{\exp(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Les deux derniers cas pour le niveau 2

$$G = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}. \quad H = \left\{ x + \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$