# HEC ECS 1 : Raisonnements

## Exercice 1 : Le raisonnement par l'absurde M1

Montrer que la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = 2u_n^2+3 \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ n'est pas convergente (on rappelle que si $u_n$ converge vers $l$ alors $u_{n+1}$ converge vers $l$ aussi.

## Exercice 2 : Le raisonnement par contraposée M1

Montrer par contraposée que si $n^2$ est paire alors $n$ est paire.
*On rappelle qu'un entier n est pair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On rappelle qu'un entier n est impair si et seulement si il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2j+1$*

## Exercice 3 : Le raisonnement par équivalence

Soit $\lambda, \beta$ deux réels tels que $0 < \lambda \leqslant \beta$.
Montrer par double implication que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n + \beta^n = 0 \Leftrightarrow \lambda, \beta \in ]0,1[$

## Exercice 4 : Le raisonnement par récurrence

1. Montrer par récurrence que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. **M2**
2. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = u_1 = 1$. Montrer que $u_n \geqslant n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. **M2**
3. On considère la suite $v_n$ définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \neq 0$, $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.
   Montrer par récurrence $n \geqslant 1$, $v_n = 2^{n-1}$.

## Exercice 5 : Existence et unicité

Soit $a \in \mathbb{R}$ On souhaite montrer l'existence d'une suite $(u_n)$ tel que $u_{n+1} - u_n = 2n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 0$

1. Existence : Trouver une suite respectant les conditions.
2. Unicité : on suppose qu'il existe deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ respectant les conditions. Montrer par réccurence la propriété $P(n)$ :"$u_n = v_n$".

# Exercice 6 : Le raisonnement par analyse-synthèse

1. Résoudre $x = \sqrt{x} + 2$. **M2**
2. Montrer que la fonction *exp* se décompose de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. (on rappelle qu'une fonction paire est une fonction qui respecte : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ et une fonction impaire est une fonction qui respecte : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(f(y) - x) = 4(4y - x) + 5$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. (On pourra prouver $f(0) = 1$).

# Défi :

On suppose que $\sqrt{2} = \dfrac{n}{p}$ avec $n, p \in \mathbb{N}$, tel que la fraction ne soit pas simplifiable (irréductible).

1. Montrer que $p$ est forcément pair.
2. Conclure sur le problème.