Exercices, niveau 2 : séries numériques

Glossaire : ➪ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➨ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✵ désigne les exercices de niveau 2.

Exercice 1 ➪

Dans chacun des cas suivants, donner une expression en fonction de n de la somme partielle de la série de terme général u_n (les suites sont toutes définies à partir de $n = 0$), en déduire si la série converge puis donner sa somme en cas de convergence.

1. $u_n = n$ 2. $u_n = \dfrac{11}{4^{n+1}}$ 3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^{2n+1}}$ 4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

1. Simplifier l'expression $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 3 ➨

Etudier la nature des séries de terme général u_n lorsque :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{t^n}$ (discuter selon les valeurs du param'etre réel t)

3. $u_n = 2\sqrt{n}\tan\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ 4. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right)$

5. $u_n = \dfrac{(\sqrt{n}+\ln(n))^2}{n^2+3n-1}$ 6. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

Exercice 4

On considère la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Quelle est la nature de la série harmonique ?
2. On introduit la suite auxiliaire v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = H_n - \ln(n)$.

   (a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

   En déduire que $\forall n \geq 2$, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} \leq \ln(n) \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n-1}$.

(b) En déduire que la suite (v_n) est monotone et qu'elle converge. On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. γ est appelée la constante d'Euler.

(c) En déduire finalement que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 5 ✵

Ecrire sous forme d'un quotient d'entiers naturels les nombres suivants : 0,9999... ; 1,11111... ; 0,14141414...

Exercice 6

Soit $v_n = (-1)^n u_n$, où $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle positive, décroissante et de limite nulle.

1. On considère S_n la somme partielle (de rang n) de la série $\sum v_n$. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire pour la série $\sum v_n$?
3. (a) En utilisant ce qui précède, déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
   (b) Cette série est-elle absolument convergente ?
   (c) Notons α la somme de cette série. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq S_{2n} - \alpha \leq \dfrac{1}{2n+1}$. En déduire un script Scilab permettant de calculer et afficher une valeur approchée de α à 0.001 près.

Exercice 7 ➨

Démontrer la convergence et calculer la somme des séries de terme général u_n, lorsque :

1. $u_n = \dfrac{5(-1)^n}{6^n}$ 2. $u_n = \dfrac{n+1}{n!}$ 3. $u_n = \dfrac{n-1}{3^{n+1}}$ (sommer à partir de $n = 0$)

Exercice 8 ➨

Étudier la nature des séries de terme général u_n, lorsque :

1. $u_n = e^{-n}$ 2. $u_n = \dfrac{n-1}{3^n-1}$ 3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ 4. $u_n = \dfrac{(\ln(n))^{20}}{\sqrt{n}}$
5. $u_n = \dfrac{\cos(\pi\sqrt{n})}{3n^2+1}$ 6. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$ 7. $u_n = (-1)^n t^{2n}$.

(pour 7. discuter selon les valeurs du paramètre réel t)

Exercice 9

Soit a un réel tel que $a \in]0,1[$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge, et préciser la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^2$.
3. Montrer que la série $\sum \ln(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$ diverge.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 10

Utilisation du critère de négligeabilité : comparaison avec une série de Riemann.

1. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.
2. Montrer que la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$ est convergente.

   (indication : trouver $\alpha > 1$ *tel que* $\dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} = \circ\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$
3. En s'inspirant de la méthode vue en 2), montrer que la série de terme général $u_n = \exp(-\sqrt{n})$ converge.

   Deux dernières questions facultatives :
4. Montrer, toujours dans le même registre, que $\sum \dfrac{(\ln n)^7}{n^{\frac{5}{4}}}$ converge.
5. Montrer avec le critère de comparaison des séries à termes positifs que $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^7}$ diverge.

Exercice 11 ➨

Démontrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{n+2}{3^{n-1}}$ 2. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^2-4}{5^n}$ 3. $\sum\limits_{n\geq 5} \dfrac{(-1)^n n}{(n-1)!}$

Défi 1 ✵

Discuter en fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de la nature de la série :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\dfrac{1}{1+2+3+\ldots+n})^\alpha$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\sqrt{n+7}-\sqrt{n})^\alpha$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^\alpha}{n^2+n^\beta}$

Défi 2 ✵

On définit les suites u et v pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. (a) On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Justifier que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

   (b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.
2. Vérifier les équivalents $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Prouver que la série $\sum v_n$ est divergente. (on aura trouvé 2 suites équivalentes dont les séries ne sont pas de même nature, d'où l'importance de la positivité dans les hypothèses du théorème associé).

Défi 3 ✵

On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = X(X-1)(X-2)$, $P_4 = X(X-1)(X-2)(X-3)$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, justifier l'existence de $\alpha_0, \ldots \alpha_4$ tels que $P = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i P_i$

2. (a) Vérifier que pour tout i, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_i(n)}{n!} = e$

   (b) Calculer en fonction de $\alpha_0, \ldots \alpha_4$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}$

3. Application : donner la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n^2}{n!}$.