Exercices, niveau 2 : comparaison des suites numériques

Glossaire : ➪ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➨ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✳ désigne les exercices de niveau 2.

Exercice 1 ➪

Ranger par ordre de négligeabilité les suites suivantes :

$a_n = \ln n,\ b_n = n^3,\ c_n = 7^n,\ d_n = \exp n,\ e_n = n!,\ f_n = n^{0,01},\ g_n = \sqrt{\ln n},\ h_n = 2^n,\ i_n = n^{15},\ j_n = (\ln n)^{18}.$

Exercice 2 ➪

Donner un équivalent simple pour chacune des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = n^3 - 4n^4 + 3n$
2. $u_n = \exp\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \exp n$
3. $u_n = n! + 10n^7$
4. $u_n = 3n^6 + 5^n - 8^n$
5. $u_n = \sqrt{n+4} + \sqrt{n+5}$
6. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$
7. $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n} - 1}$
8. $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)^2}$

Exercice 3

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ alors $x_n \sim y_n$. Est-ce vrai ?
2. Soit (x_n) et (y_n) deux suites convergentes dans $\bar{\mathbb{R}}$ et on les suppose équivalentes.
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Est-ce vrai ?
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0$. Est-ce vrai ?

Exercice 4

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n} - 3n + 6}{\sqrt{1+4n+n^3}}$
2. $u_n = n\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - n$
3. $u_n = \sqrt{n}\left(\ln(n+3) - \ln(n)\right)$
4. $u_n = \dfrac{\exp\frac{1}{n^2} - 1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1}$

Exercice 5

Une suite (u_n) positive vérifie : $\forall n \geq 2$, $\quad 2n+1 \leq u_n^2 \leq 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}$.
Donner un équivalent de la suite (u_n).

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x) = x\exp(-\frac{n}{x}) - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif, que l'on notera x_n, tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est strictement supérieur à 1.
3. Montrer que $f_n(x_{n+1}) = \exp(\frac{1}{x_{n+1}}) - 1$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \ln(x_n) = n$, puis que $\ln(\ln(x_n)) + \ln(x_n) = \ln(n)$. En déduire que $\ln(x_n) \sim \ln(n)$.
6. Trouver un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

Soit k un entier naturel fixé. Calculer la limite de $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8

Partie A

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a $\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)dt$.
2. En déduire un encadrement de $\ln(n!)$ pour tout entier $n \geq 2$.
3. Montrer que $\ln(n!) \sim \ln(n^n)$.

On n'a cependant pas $n! \sim n^n$. Une formule appelée "formule de Stirling" donne un équivalent de $n!$:
$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$

Partie B

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, justifier que $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.
2. En déduire que $H_n - 1 \leqslant ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$
3. Conclure en prouvant $H_n \sim ln(n)$

Exercice 9 ✵

On considère la suite u définie par $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 2 + \dfrac{u_n}{3n^2}$.

1. Montrer que la suite u est majorée par 3.
2. En déduire la limite l de la suite u et donner un équivalent de $u_n - l$.

Défi 1 ✵

Reprendre l'exercice sur les intégrales de Wallis fait en Dm et montrer que :
$W_n \sim W_{n+1}$ et $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Défi 2 ✵

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'équation $x^4 + x^3 - n = 0$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}_+^*$. Justifier que la suite (u_n) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$.
Prouver que $u_n \sim (u_n + 1)$ et $u_n \sim n^{1/4}$.