Exercices, niveau 2 : dimensions et rang.

Glossaire : ➩ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➨ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✳ désigne les exercices de niveau 2.

➨ Exercice 1 : révisions

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0\ \}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'ensemble G des fonctions f telles qu'il existe a et b réels vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ est un sous-espace vectoriel de E. Est un sous espace vectoriel de F ?
4. (défi) Montrer que la famille $\{t \mapsto cos(t), t \mapsto cos(2t), \dots, t \mapsto cos(nt)\}$ est libre quelque soit n.
   Que peut on alors dire sur $dim(F)$?

➩ Exercice 2

1. Montrer que $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et donner sa dimension.
2. Montrer que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donner sa dimension.
3. Montrer que $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner sa dimension.

➩ Exercice 3

Compléter :

Soit une famille de cardinal 4 dans un espace vectoriel de dimension 5. On est sur que cette famille n'est pas ...
Soit une famille de cardinal 6 dans un espace vectoriel de dimension 5. On est sur que cette famille est ...
Soit E un espace de dimension n. Une famille est de cardinal $n+1$ est ......
Que dire d'une famille de cardinal n ?

➨ Exercice 4

Dans $M_{2,2}(\mathbb{R})$, on considère les 4 matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (A,B,C,D) est une base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans cette base.
3. Ecrire la matrice des coordonnées de M dans cette base et dans la base canonique de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Soit $H = \{(a+b, b+c, c+d, d+a) | (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$.

1. Le vecteur $(1,1,2,0)$ appartient-il à H ?
2. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer une base de H et donner la dimension de H.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On pose :

$$H = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
2. On note $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de E. On définit $f_i = e_i - e_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ et $f_n = e_n$.
   (a) Montrer que la famille $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est une base de E.
   (b) Montrer que $(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})$ est une famille libre de H. Expliquer alors pourquoi on peut en déduire que la dimension de H est au moins $n-1$.
   (c) Montrer que la dimension de H est $n-1$. En déduire que $(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})$ est une base de H.

Exercice 7

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.
3. ✳ Généraliser le résultat précédent à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. ✳ Quelle est la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 8

1. Montrer que $\text{Vect}((1,1,1),(-1,1,0)) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\right\}$
2. Montrer que $\text{Vect}((1,1,1),(-1,0,1)) = \text{Vect}((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5))$.

Exercice 9

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et a un réel non nul. On appelle F l'ensemble des suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et justifier que c'est une droite vectorielle.

Exercice 10

Polynômes de Lagrange

Soient n un entier naturel non nul et $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ une suite de nombres réels distincts. On leur associe les n polynômes $(L_j)_{1\leq j\leq n}$ définis par : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $L_j = \displaystyle\prod_{1\leq k\leq n, k\neq j} \frac{X-x_k}{x_j-x_k}$.

1. Pour tout entier $j \in [\![1,n]\!]$, expliciter le degré et les racines du polynôme L_j. Calculer $L_j(x_j)$.
2. Montrer que la famille $(L_j)_{1\leq j\leq n}$ constitue une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on pose : $Q = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(x_j)L_j$.
   (a) Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, calculer $Q(x_k)$.
   (b) Prouver que $Q = P$.
   (c) Quelles sont les coordonnées de P dans la base $(L_j)_{1\leq j\leq n}$?
4. *Application* : trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $P(0) = -1$, $P(1) = 1$, $P(2) = 0$ et $P(3) = 1$. Ce polynôme est-il unique ?

Exercice 11

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs : $u_1 = (1,1,0,2)$, $u_2 = (-1,0,2,1)$, $u_3 = (0,1,2,3)$, $u_4 = (1,3,4,8)$.
   Déterminer le rang de la famille (u_1,u_2,u_3,u_4).
2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les vecteurs :
   $P_1 = 1+X-X^2+X^3 \quad P_2 = 2-X+X^3 \quad P_3 = 1+X+2X^2-X^3 \quad P_4 = -1+X+X^3$
   Déterminer le rang de la famille (P_1,P_2,P_3,P_4).
3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (1,0,-1)$, $u_3 = (0,1,2)$.
   Déterminer le rang de la famille (u_1,u_2,u_3).
4. Donner le rang de la famille $\{f,g,h\}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, si $f : x \mapsto ln(4x)$, $g : x \mapsto ln(2x)$ et $h : x \mapsto ln(x)$.

Exercice 12

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (ax^2+bx+c)cos(x)$.

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et donner sa dimension.

✷ Exercice 13

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que $\{f_0, f_1, ..., f_N\}$ est libre. On utilisera les racines d'un certain polynôme.
2. En déduire que E est de dimension infinie par l'absurde.

✳ Défi 1

Soit $p_i n\mathbb{N}^*$ l'ensemble des suites réelles p périodiques ie l'ensemble des suites rélles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(n+p) = u(n)$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.
Montrer que $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de E.

✳ Défi 2

Dans $E = \mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$, on considère f_1, f_2, f_3, f_4 définie par

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$