Exercices, niveau 2 : Polynômes : Théorèmes fondamentaux

Glossaire : ➪ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➨ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✷ désigne les exercices de niveau 2.

Exercice 1 ➪

1. Appliquer la formule de Taylor au polynôme $P = X^3 + 3X^2 - 2$ en 1. En déduire le reste et le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule de Taylor, déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + 2X - 2 \in \mathbb{R}[X]$ par $(X-2)^2 \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et on pose $Q = P(X+1) + P(X)$
(par exemple, si $P = X^2 - 3X$, on a $Q = (X+1)^2 - 3(X+1) + X^2 - 3X$).

1. On suppose que P est de degré n avec $n \in \mathbb{N}$. Quel est le degré de Q ?
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) + P(X) = 0$.

Exercice 3 ➪

Calculer la matrice du vecteur $P = X^3 - 3X^2 + 5X - 2$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base $(1, (X+2), (X+2)^2, (X+2)^3)$.

Exercice 4

Montrer, sans développer, que le polynôme suivant est nul, si a, b, c sont distincts :

$$P = (X-a)^2(b-c) + (X-b)^2(c-a) + (X-c)^2(a-b) + (a-b)(c-a)(b-c)$$

Exercice 5 ✷

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que : $P(X+1) = P(X) \ \Leftrightarrow\ P$ est un polynôme constant.

Exercice 6 ➪

Déterminer l'ordre de la racine α du polynôme P lorsque :
1. $\alpha = -1$ et $P = X^{99} + 2X^{40} - 3X^2 + 2$ 2. $\alpha = 1$ et $P = X^{n+1} - (n+1)X + n$

Exercice 7 ➡

1. Soit $P = X^4 + 2X^2 + 1$. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes : 1. $P = X^3 + 2X^2 - 1$ 2. $Q = 2X^4 + 32$. (réflechir au factorisation possible)

Exercice 8 ⇨

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $P = X^n - 2X^{n-1} - X + 2$ est divisible par $(X-1)(X-2)$.
2. Montrer que $P = X^8 - 2X^2 - 3$ est divisible par $X^2 + 1$.
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $P = X^{n+1} - (n+1)X + n$ est divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 9

On considère la suite (T_n) de polynômes réels, définie par :
$T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. (a) ➡ Expliciter T_2, T_3, T_4.
   (b) ➡ Déterminer le degré de T_n, son coefficient dominant.
   (c) ➡ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$. En déduire la parité de T_n.
2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ecrire $\cos(2\theta)$ puis $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
   (b) Etablir par récurrence (en utilisant des formules de trigonométrie) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   (c) En déduire $T_n(1)$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$.

1. Donner une relation entre P'_{n+1} et P_n.
2. Montrer que P_n n'admet pas de racine multiple.
3. Montrer que P_{2n} n'admet aucune racine réelle et P_{2n+1} admet une unique racine réelle.

Exercice 11

Polynômes de Lagrange (mathématicien-physicien français, 1736-1813) :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ des réels. On définit n polynômes $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ par :

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\},\ Q_j = \prod_{1 \le p \le n \text{ et } p \neq j} \frac{X - x_p}{x_j - x_p}$$

Par exemple, lorsque $n = 3$, on a :

$$Q_1 = \frac{(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\ ;\ Q_2 = \frac{(X-x_1)(X-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\ ;\ Q_3 = \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

1. Déterminer, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, le degré de Q_j.
2. Déterminer, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, la valeur de $Q_j(x_k)$ pour $k \neq j$, puis la valeur de $Q_j(x_j)$.
3. Soit $y_1, y_2, \cdots, y_n$ des réels.

   (a) Soit P le polynôme à coefficients réels :

   $$P = \sum_{j=1}^{n} y_j Q_j$$

   Calculer, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, la valeur de $P(x_k)$.

   (b) Montrer que, si P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, tous deux de degré inférieur ou égal à $n-1$, vérifiant :

   $$\forall k \in \{1, \cdots, n\} \ , \ P(x_k) = Q(x_k)$$

   alors $P = Q$ (*indication : considérer le polynôme* $P - Q$)

   (c) Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que

   $$\forall k \in \{1, \cdots, n\} \ , \ P(x_k) = y_k$$

4. Exemple : on prend ici $n = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

   (a) Expliciter les polynômes Q_1 , Q_2 et Q_3.

   (b) Déterminer le polynôme P de degré au plus 2 tel que $P(0) = 3$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 1$

Défi ✳

Montrer que le polynôme $P = X^3 + pX + q$ admet une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$