Fiche exercices 16 : Les polynômes, généralités
Niveau 2

Glossaire : ➪ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➡ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✳ désigne les exercices de niveau 2.

Exercice 1

1. Soit $P = X^8 + 4X^5 - 2X^3 - 3X^2 - 3$ et $Q = 2X^7 - 4X^5 - X^4 - 5X^3 - 4X$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Calculer les coefficients de X^6 et de X^2 du produit PQ.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = (X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$. Calculer de deux façons le coefficient de X^n de P et en déduire une formule portant sur les combinaisons.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants :

1.➪ $P_1 = X^3 - X(X-2)^2$ 2.➪ $P_2 = \prod_{k=0}^{n}(2X-k)$ 3. $P_3 = (X-2)^n - (X+5)^n$ 4. $P_4 = \prod_{k=0}^{n}(X-6)^k$

Exercice 3 ➪

Effectuer les divisions euclidiennes de A par B lorsque :

1. $A = 2 - X - X^2 + 2X^3$ et $B = X^2 - 1$ 2. $A = X^3 + X^2 - 2X$ et $B = X + 2$
3. $A = -X^6 + X^4 - X$ et $B = X^3$.

Exercice 3 bis

Déterminer les valeurs des réels a et b pour que $X^2 - 4X + 5$ divise $X^4 - 4X^3 + aX^2 - 4X + b$.

Exercice 4

Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes à coefficients réels définie par $P_0 = 1$, $P_1 = -2X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n$.

1. ➪ Calculer P_2 et P_3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P_n(0)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2(n+1)u_n$.
   (b) En déduire u_{2p} et u_{2p+1} pour p entier naturel.
   (c) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on X qui divise P_n ?

Exercice 5

1. Quel est le reste de la division euclidienne de $A = 2X^9 - 4X^5 \in \mathbb{R}[X]$ par $B = X + 1 \in \mathbb{R}[X]$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n \in \mathbb{R}[X]$ par $(X-8)(X+2) \in \mathbb{R}[X]$.
3. ➡ Quel est le reste de la division euclidienne de $A = 2X^4 - 4X^3 + 2 \in \mathbb{R}[X]$ par $B = X - 1 \in \mathbb{R}[X]$? Déterminer aussi le quotient.

Exercice 6

1. ➡ Donner le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-3X+2
2. Application : Soit $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$: vérifier que $A^2-3A+2=0$.
   En déduire de la question précédente A^n pour tout n.

Exercice 7

En considèrant le polynôme $(X-a)(X-b)$, résoudre le système d'inconnues $a,b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a+b & = & 1 \\ ab & = & -1 \end{cases}$$

Exercice 8 :✳

On considère la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(X) = 2X^2P_n(X)+1$.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3. Conjecturer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de P_n.
2. Prouver la conjecturer.

Exercice 9 :✳

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX_k$. Montrer que P est paire si et seulement si $a_{k+1} = 0$ pour tout k.
2. Soit P un polynôme et A_P l'ensemble des multiples de P.
   (a) Soit $P,Q \in \mathbb{R}[X]$: prouver que $P|Q \Leftrightarrow A_Q \subset A_P$.
   (b) Que dire si $A_P = A_Q$?

Exercice 10 : ⇨

Soit $n \in \mathbb{N}$, donner le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par X^2-3X+2.

Défi 1

1. Trouver tous les polynômes tels que $P(X+1) = P(X)$.
2. Trouver tous les polynômes tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
3. Trouver tous les polynômes tels que $(X-1)P'X) - nP(X) = 0$.

Défi 2

Exprimer $cos(2\theta)$ et $cos(3\theta)$ en fonction de $cos(\theta)$ et en déduire qu'il existe un polynôme P à déterminer tel que $cos(3\theta) - 2cos(2\theta) + 2cos(\theta) - 1 = P(cos(\theta))$.
En trouvant une solution de $cos(3\theta) - 2cos(2\theta) + 2cos(\theta) = 1$, factoriser P et en déduire l'ensemble des solution de $cos(3\theta) - 2cos(2\theta) + 2cos(\theta) = 1$