Exercices, niveau 2 : probabilités finies

Glossaire : ⇨ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➡ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✷ désigne les exercices de niveau 2.

Exercice 1 ⇨

Une épreuve aléatoire consiste à tirer successivement 2 cartes d'un jeu. Soit A l'événement "la première carte tirée est rouge" et B l'événement "la deuxième carte tirée est rouge". Ecrire les événements suivants en fonction de A et de B à l'aide des opérations ensemblistes $\cap$, $\cup$ et complémentaire :

R : "au moins une des cartes est rouge"

S : "une seule des cartes est rouge"

Exercice 2

On jette deux fois un dé à six faces.

1. Décrire l'univers associé à cette expérience.
2. Expliciter les événements suivants et indiquer leurs cardinaux :
   A : " le premier jet a donné 1 ". B : " la somme des deux dés est 5 ".
   $C = A \cap B$. $D = A \cup B$.
   $E = A \setminus B$.
3. En supposant le dé équilibré, déterminer les probabilités de C et de D.

Exercice 3 ⇨

On considère des événements $A, B, C, A_1, \cdots, A_n$. Ecrire à l'aide des opérations ensemblistes $\cap$, $\cup$ et complémentaire les événements suivants :

1. L'un au moins des événements A, B, C est réalisé.
2. Les événements A et B sont réalisés.
3. Les événements A et B se réalisent mais pas C.
4. Un et un seul des événements A ou B est réalisé.
5. Tous les événements $(A_i)_{i=1\cdots n}$ se réalisent.
6. Au moins un des événements $(A_i)_{i=1\cdots n}$ se réalise.

Exercice 4

Dans une entreprise, la probabilité que l'extincteur automatique d'incendie tombe en panne est 0,2. La probabilité que le système d'alarme ne fonctionne pas est 0,1. La probabilité que les deux soient simultanément défaillants est 0,04. Quelle est la probabilité que :

a) au moins l'un des deux systèmes fonctionne ?

b) les deux systèmes fonctionnent ?

Exercice 5

On considère des événements $B, A_1, \cdots, A_n$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et on suppose que la famille $(A_1, \cdots, A_n)$ forme un système complet d'événements. Montrer que $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$.

Exercice 6

Une urne contient 15 boules : 6 blanches et 9 rouges. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité des évènements :

1. A : " les trois boules tirées sont rouges ".
2. B : " les trois boules tirées sont de la même couleur ".
3. C : " parmi les boules tirées figure au moins une boule rouge ".
4. D : " le tirage est bicolore ".

Indice : On utilisera l'équiprobabilité et le dénombrement !

Exercice 7 ➨

Une urne contient 5 boules numérotées 1,2,3,4,5.

1. On tire deux boules de l'urne successivement et sans remise. Décrire l'univers. Quelle est la probabilité que les deux numéros obtenus soient pairs ?
2. On tire deux boules de l'urne successivement et avec remise. Décrire l'univers. Quelle est la probabilité que les deux numéros obtenus soient pairs ?
3. On tire deux boules de l'urne simultanément. Décrire l'univers. Quelle est la probabilité que les deux numéros obtenus soient pairs ?

Exercice 8 ✷

1. On considère une classe comportant 25 étudiants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient la même date d'anniversaire ? (pour faire ce calcul, on supposera que tous les jours de l'année sont équiprobables comme jour de naissance, et qu'une année comporte 365 jours)
   Indication : quelle expérience aléatoire fait-on ?
2. En supposant que la classe comporte n étudiants, à partir de quelle valeur de n a-t-on une probabilité supérieure à $0,5$ qu'au moins deux étudiants aient la même date d'anniversaire ? pour répondre à cette question, écrire une fonction Python permettant de calculer la probabilité p_n qu'au moins deux étudiants aient la même date d'anniversaire lorsque l'effectif de la classe est n.

Exercice 9

On considère des événements $A, B, C, A_1, \cdots, A_n$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

1. Montrer par récurrence que $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, on rappelle que quelque soit les événements C et D, $P(C \cup D) \leqslant P(C) + P(D)$ (car ... ?).
2. Montrer que $P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) - P(\overline{C})$. (Partir de $P(\overline{A \cap B \cap C})$)

Exercice 10

1. On considère des événements A, B, C d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Montrer que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

.

2. Une urne contient 3 boules, une verte, une rouge et une noire. On pioche au hasard n fois de suite une boule dans cette urne, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne (on prend $n \geq 3$). On considère les événements suivants :
   A_n : "les trois couleurs apparaissent au moins une fois au cours des n pioches"
   V : "la couleur verte n'apparait pas au cours des n pioches"
   R : "la couleur rouge n'apparait pas au cours des n pioches"
   N : "la couleur noire n'apparait pas au cours des n pioches"
   (a) Exprimer A_n en fonction des événements V, R et N.
   (b) Après avoir décrit l'univers, justifier que $P(R \cap N) = \dfrac{1}{3^n}$ puis calculer $P(R)$.
   (c) Montrer à l'aide de la formule montrée en 1. que $P(A_n) = 1 - 3(2/3)^n + (1/3)^{n-1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$. (on utilisera aussi la question a)

Exercice 11 ✳

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On retire en une fois de cette urne une poignée aléatoire de p boules ($1 \leq p \leq n$).

1. Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Calculer la probabilité de l'évènement A_k : " le plus grand numéro de la poignée est k ".
2. Que peut-on dire de la famille d'événements $(A_p, A_{p+1}, \cdots, A_n)$? En déduire la formule :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$$

Exercice 12 ➨

Un tiroir contient 10 paires de chaussures toutes différentes. Il y a 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On prend deux chaussures au hasard. Quelle est la probabilité de tirer :

1. deux chaussures de même couleur ?
2. un pied gauche et un pied droit ?
3. au moins un pied gauche ?
4. une vraie paire de chaussures ?

Exercice 13 ✳

on dispose d'une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, et on en tire simultanément un certain nombre fixe. Quelle est la probabilité que la somme des numéros tirés soit égale à la somme des numéros restant dans l'urne ?

Exercice 14, facultatif

Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker). Quelle est la probabilité que sa main contienne :

1. un carré (quatre cartes de même hauteur) ?
2. un full (un brelan et une paire, de hauteurs différentes) ?