HEC ECS 1 : Matrices, généralités : niveau 2

Exercice 1

On considère les matrices suivantes de $M_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Parmi les matrices M_1, M_2 et M_3, déterminer celles qui sont combinaisons linéaires de A_1 et A_2.

Exercice 2

On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB puis $(AB)C$, et BC puis $A(BC)$. Commenter le résultat.
2. Calculer $(A+B)C$ et $AC+BC$. Commenter le résultat.
3. Calculer ${}^t(AB)$ et ${}^tA{}^tB$. Commenter le résultat.

Exercice 3

On considère la matrice suivante de $M_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. La matrice A^2 est-elle combinaison linéaire des matrices A et I ?
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = 2^n I$.
3. Calculer A^{2015}.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n par récurrence : $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On pose $B = A - I$. Vérifier que $B^2 = 0$.
2. En écrivant $A = B + I$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. On pose $B = A + I$. Vérifier que $B^3 = 0$.
2. En déduire en s'inspirant de l'exercice précédent le calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_4.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_4$. Expliciter a_0, b_0, a_1, b_1 ainsi que a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Montrer que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et calculer a_n en fonction de n.
4. Calculer b_n en fonction de n et en déduire les coefficients de la matrice A^n.

Exercice 8 (niveau 2)

1. Quelles sont toutes les matrices à la fois symétriques et antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer par analyse synthèse que tout matrice M peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique.
3. Est ce que l'ensemble des matrices symétriques est stable par produit ? Et celui des matrices antisymétriques ?

Exercice 9

6 questions indépendantes à propos d'inversibilité

1. On considère la matrice suivante de $M_3(\mathbb{C})$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) Exprimer A^3 en fonction de la matrice identité I de $M_3(\mathbb{C})$.
   En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. (a) Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que la i-ème ligne de A est nulle. Quelle conséquence a-t-on pour la matrice AB ? En déduire qu'une matrice ayant une ligne nulle ne peut pas être inversible.
   (b) Montrer qu'une matrice ayant une colonne nulle n'est pas inversible.

3. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A = I$. Montrer que A est inversible.

4. Pourquoi peut-on dire que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ est inversible ? Préciser A^{-1}.

5. On considère la matrice N telle que $N^3 = 0$. Est ce que la matrice est inversible ? Que dire si $N^3 = N$?
6. Que dire de l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$?

Exercice 10

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{4}(J + I_3)$.

1. Calculer J^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit (x_n), (y_n) et (z_n) les suites de réels définies par la donnée de leurs premiers termes x_0, y_0, z_0 et par : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + y_n + z_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 2y_n + z_n) \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + y_n + 2z_n) \end{cases}.$$
On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $AX_n = X_{n+1}$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. En déduire l'expression de (x_n), (y_n) et (z_n) en fonction de n, puis les limites éventuelles de ces suites.

Exercice 11

Soit a, b, c et d des complexes. On considère les matrices à coefficients complexes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si $c = d = 0$, la matrice A n'est pas inversible.
2. On suppose que $ad - bc = 0$. Calculer AC. En raisonnant par l'absurde, montrer que A n'est pas inversible.
3. Calculer AB. En déduire que si $ad - bc \neq 0$ alors A est inversible et déterminer son inverse.
4. Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont inversibles et calculer leur inverse dans ce cas.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12

On considère la matrice suivante de $M_3(\mathbb{R})$: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Résoudre le système $\begin{cases} 2x - 2y - z = -3 \\ -2x - y - 2z = 0 \\ -x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$ (faites le lien avec la question précédente !)

Exercice 13

Déterminer, si elle existe, la matrice inverse des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & -11 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 : niveau 2

On appelle matrice nilpotente une matrice N tel qu'il existe $p \in$ tel que $N^p = 0$.
Donner une matrice nilpotente non nulle.
Montrer que si M et N sont nilpotentes et telles que $MN = NM$, montrer que MN et $M+N$ sont nilpotente aussi.
Montrer que si M est nilpotente, alors $(I-M)$ est inversible.

Défi 1

Donner l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & n \\ 0 & 1 & 0\dots & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Défi 2

On considère l'application $\phi : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ par $\phi(z) = \begin{pmatrix} Re(z) & Im(z) \\ -Im(z) & Re(z) \end{pmatrix}$

1. Calculer $\phi(1)$ et $\phi(i)$.
2. Justifier que ϕ est une application injective. Est elle surjective ?
3. (a) Prouver que pour tout $z, z \in \mathbb{C}$:

$$\phi(z+z') = \phi(z) + \phi(z') \; et \; \phi(zz') = \phi(z)\phi(z')$$

   (b) En déduire les puissances de $\phi(i)$ et $\phi(1+i)$.

   (c) Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C} : det(\phi(z)) = |z|^2$. À quelle condition sur z, $\phi_(z)$ est inversible ?

Exercices simples à faire chez soi

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.
Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA ${}^t(AB)$ et ${}^tB^tA$ (vérifier l'égalité) puis $(3A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$.

Résoudre l'équation $A-3X=2B$ où $X \in M_2(\mathbb{R})$
Calculer le carré et le cube des deux matrices suivante :

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \ et \ E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 2

Calculer LC et CL pour $L=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$
Calculer I_3C et LI_3.
Calculer DC et CD pour D la matrice de l'exercice précédent.
Donner les produits possibles ainsi que le format du produit entre des matrices de $(2,3)$, $(4,3)$, $(2,2)$ et $(4,4)$.

Exercice 3

Soit A et B 2 matrices carrés : développer et simplifier :
$(2A)(3B)-(A+2B)^2+(A-B)(A+B)$ et $(A+B)(2A^2-2B)-2A^2(A+B)+(-A+B)^2$.
Développer $(A+I_n)^3$ et $(A+I_n)^4$.

Exercice 4

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Montrer que $A^3-A^2-A+I=0$ et en déduire que A est inversible et donner (A^{-1}).
Faire de même avec $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $C^3-3C^2+2C=0$.

Exercice 5

Donner l'inverse par la résolution d'un système : $\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Exercice 6

Calculer $\begin{pmatrix}cos(x) & -sin(x)\\ cos(x) & sin(x)\end{pmatrix}^2$
On considère les matrices de taille 3, et on note $E_{i,j}$ la matrice nulle sauf le coefficient ligne i colonne j qui vaut 1.
Calculer $E_{12}E_{23}$, $E_{21}E_{33}$. Que vaut $E_{ij}E_{kl}$ en général ?

Exercice 7

Par une conjecture-récurrence, calculer la puisssance n ème de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère la suite de matrice $(X_n) \in M_{3,1}()$ définie par, pour tout $n \in$, $X_{n+1} = AX_n$. Montrer que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in$.

Donner alors l'expression de X_n en fonction de n et de $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$