

Kholles : 31/01/22

30 janvier 2022

1 Exercices

1. On pose $a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{q}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$.

Calculer $\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$

Que peut on en déduire ?

2. Pour quels $\alpha > 0$ la famille suivante est elle sommable ?

$$\left(\frac{1}{(p^2 + q^2)^\alpha} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$$

(indice : on commencera par justifier que l'étude de la convergence revient à celle de $\left(\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$

3. (a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un " six " ?

(b) Même question avec deux dés pour obtenir un " double-six ".

4. Soit n et p , 2 entiers naturels non nuls tels que $n \geq p$.

(a) Combien existe-t'il d'applications de $[[1;n]]$ vers $[[1;p]]$?

(b) Pour $i \in [[1;p]]$, notons D_i l'ensemble des applications de $[[1;n]]$ vers $[[1;p]] \setminus \{i\}$.

i. Quel est le cardinal de D_i ?

ii. Soit i et j 2 éléments distincts de $[[1;p]]$, quel est le cardinal de $D_i \cap D_j$?

iii. Soient, plus généralement, i_1, i_2, \dots, i_k des éléments de $[[1;p]]$. Quel est le cardinal de $D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k}$?

(c) Soit S_n^p le nombre d'applications surjectives de $[[1;n]]$ vers $[[1;p]]$.

i. Montrer que $p^n = S_n^p + \text{Card}(D_1 \cup \dots \cup D_n)$.

ii. À l'aide de la formule du Crible, donner une expression de S_n^p en fonction du symbole \sum , des coefficients binomiaux et des puissances.

5. Soit E un ensemble de cardinal n , trouver le nombre de relation binaire antisymétrique que l'on peut définir sur E .

6. (BONUS) On considère un polygone convexe à n côtés. On dispose de $c \geq 2$ couleurs différentes et on désire colorier le polygone, de façon à ce que chaque côté contigu soit de couleur différentes. On note $N_c(n)$ le nombre de façon de procéder. Trouver pour $n \geq 2$ $N_c(n)$. On pourra montrer que pour $n \geq 4$, $N_c(n) = (c-1)N_c(n-1) + (c-2)N_c(n-2)$.