Kholle C : 16/11/2021

Robin Loris

1 Questions de cours

Donner la densité, la fonction de répartition, l'espérance, la variance et un contexte d'usage de la loi gamma de paramètres $b, t > 0$.
Donner la définition de l'espérance conditionnelle.

2 Exercices

Concours HEC 2019

Sujet S 293

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : loi d'un couple de variables aléatoires discrètes, caractérisation de leur indépendance.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tout entier n strictement supérieur à 2, on note

$$N_1^{(n)} = \mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \,;\, X_i \in [1 - \frac{1}{n}, 1]\}$$

$$N_2^{(n)} = \mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \,;\, X_i \in [1 - \frac{2}{n}, 1 - \frac{1}{n}[\}$$

2. Soit n un entier strictement supérieur à 2.
   a) Reconnaître la loi de chacune des deux variables aléatoires $N_1^{(n)}$ et $N_2^{(n)}$.
   b) Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
   c) Écrire une fonction *Scilab* permettant d'effectuer une simulation du couple $(N_1^{(n)}, N_2^{(n)})$.
3. Établir, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ et pour tout entier $n \geq \max\{3, k + \ell\}$, l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} P([N_1^{(n)} = k] \cap [N_2^{(n)}] = \ell]) = \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!} \frac{(n-2)^{n-k-\ell}}{n^n} .$$

4. Démontrer que la suite $(N_1^{(n)} + N_2^{(n)})_{n\geq 3}$ converge en loi vers une variable suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.
5. Soit $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Calculer, pour tout entier $n \geq 3$, l'espérance de la variable aléatoire $s_1^{N_1^{(n)}} s_2^{N_2^{(n)}}$.
   b) Vérifier l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(s_1^{N_1^{(n)}} s_2^{N_2^{(n)}}\right) = \mathrm{e}^{s_1+s_2-2} .$$

1.

2. On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner la fonction de répartition, l'espérance et la variance de $\dfrac{inf(X,1-X)}{sup(X,1-X)}$,.
3. (BONUS) On considère $Z = \lfloor X \rfloor + 1$ où X est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. On admet que Z est une variable aléatoire. Donner la loi de Z et son espérance et sa variance.