Kholles MP 16/11/2021

1 Questions de cours

Donner et démontrer le critère des degrés étagés. Donner et démontrer la formule de Taylor dans un corps contenant $\mathbb{Q}$.

2 Exercices arcs paramétrés

1. On considère la courbe paramètree définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t^2 \\ y & = & 2t^3 \end{array}\right.$$

   (a) Étudier la courbe.
   (b) Donner une équation de la tangente et de la normale en le point M de paramètre t.
   (c) Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cette courbe.

3 Exercices algèbre générale :

1. On dit qu'un anneau A est régulier ssi
$$\forall x \in A\,,\, \exists y \in A\,, xyx = x$$
On considère un anneau A régulier et l'on introduit
$$Z = \{x \in A | \forall a \in A\,,\, ax = xa\}$$
Montrer que Z est un sous anneau régulier de A.
2. Soit f un morphisme d'anneau de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe.
3. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A un anneau commutatif forme un idéal de A.
4. Soit $G =]-1,1[$ muni de la loi : $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$.
   (a) Montrer que $(G,*)$ est un groupe commutatif.
   (b) $([0;1[,*)$ est il un sous groupe de G ?
   (c) Si on note $a^{(n)} = a * a * \ldots. * a$, montrer que pour tout entier naturel n, il existe P_n et Q_n tels que pour tout $a \in G$, $a^{(n)} = \dfrac{P_n(a)}{Q_n(a)}$ avec $P_n + Q_n = (1+X)^n$ et $P_n - Q_n = -(1-X)^n$.
   (d) Montrer que th réalise un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ sur $(G,*)$. En déduire une expression de $th(nx)$ en fonction de n et x.
5. Soit p un nombre premier. On pose $G_p = \{z \in \mathbb{C} | k \in \mathbb{N}\,,\, z^{p^k} = 1\}$
   (a) Montrer que G_p est un groupe pour la multiplication.
   (b) Montrer que les sous-groupes propres de G_p sont cycliques et qu'auncun d'eux n'est maximal pour l'inclusion.
   (c) Montrer que G_p ne peut pas être engendré par un système fini d'éléments.
6. Bonus : Montrer que $a^{2^{n-2}} \equiv 1[2^n]$ pour a impair. Est ce que le groupe $(\mathbb{Z}/(2^n)\mathbb{Z})^*$ est cyclique ?
7. Bonus : Que dire d'une suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de $\mathbb{Z}$? Et de $\mathbb{K}[X]$?

4 Exercice intégrations

1. Donner les primitives des fonctions suivantes :
   (a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
   (b) $\dfrac{sin(x)}{1+sin(x)^2}$
   (c) $\dfrac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}$
   (d) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}dx$
2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = 1 - \dfrac{ln(2)}{n} + o(\dfrac{1}{n})$
3. Calculer
$$\int cos(\theta)^{2l} sin(\theta)^{2m}\, d\theta$$
4. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Établir
$$\int_0^\pi t f(sin(t))dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(sin(t))\, dt$$
En déduire la valeur de
$$I_n = \int_0^\pi \frac{x sin^{2n}(x)}{sin^{2n}(x)+cos^{2n}(x)}\, dx$$