Kholles C 17/12/20

1 Exercices

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = arctan(x)$. On considère :

$$E = \left\{\alpha f + \beta f^2 | (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right\} \ et \ F = \left\{\alpha f^3 | \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

   (a) Montrer que F et G sont des espaces vectoriels réels.

   (b) Déterminer $E \cap F$.

2. Soient U, V et W trois s-e-v d'un $\mathbb{R}$ e-v de dimension n.

   (a) On suppose que $dim(U) + dim(V) > n$. Montrer que $U \cap V$ n'est pas réduit au vecteur nul.

   (b) On suppose $dim(U) + dim(V) + dim(W) > 2n$. Que dire de l'espace $U \cap V \cap W$?

3. Soient $f, g \in L(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = g \ et \ f \circ g \circ f = f$$

   (a) Montrer que $Im(f)$ et $ker(g)$ sont supplémentaires dans E.

   (b) Justifier que $f(Im(g)) = Im(f)$.

4. (BONUS)

   (a) Soit f et g 2 applications d'un espace vectoriel E de dimension finie vers un espace vectoriel F de dimension finie. Montrer que :

$$|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$$

   (b) Soient H_1 et H_2 2 sous espaces vectoriels supplémentaires de $L(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété :

$$\forall (f,g) \in H_1 \times H_2, \ f \circ g + g \circ f = 0$$

      i. Montrer qu'il existe $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tels que $p_1 + p_2 = id$.

      ii. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.

      iii. Montrer que $dim(H_1) \leqslant (n - rg(p_2))^2$ et que $dim(H_2) \leqslant (n - rg(p_1))^2$.

      iv. Quels sont les seuls choix possibles pour H_1 et H_2 ?