

Kholles : 31/01/22

30 janvier 2022

1 Exercices

1. Existence et valeur de

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

2. Montrer que l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} est dénombrable.

3. Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10. On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?

(b) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant.

(c) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à $n+3$ éléments et F un ensemble à n éléments.

(a) Combien existe-t'il d'applications surjectives de E vers F telle que l'un des éléments de F aient 4 antécédents ?

(b) Combien existe-t'il d'applications surjectives de E vers F telle que l'un des éléments de F aient 3 antécédents et un autre 2 ?

(c) Combien existe-t'il d'applications surjectives de E vers F ?

5. Soit E un ensemble à n éléments. Quelle est la moyenne ou l'écart type du nombre d'éléments d'une partie de E ?

6. (BONUS) On considère un polygone convexe à n côtés. On dispose de $c \geq 2$ couleurs différentes et on désire colorier le polygone, de façon à ce que chaque côte contigu soit de couleur différentes. On note $N_c(n)$ le nombre de façon de procéder. Trouver pour $n \geq 2$ $N_c(n)$. On pourra montrer que pour $n \geq 4$, $N_c(n) = (c-1)N_c(n-1) + (c-2)N_c(n-2)$.