Kholle B :16/11/2021

Robin Loris

1 Questions de cours

Donner la densité, la fonction de répartition, l'espérance, la variance et un contexte d'usage de la loi uniforme sur $[a;b]$. Donner le th. de l'espérance totale.

2 Exercices

1. Démontrer la convergence et déterminer la valeur de la série de terme général $u_n = ln(1-\frac{1}{n^2})$ pour $n \geqslant 2$ (on écrira u_n sous la forme $ln(A)+ln(B)-2ln(C)$)
2. Pour quel x a t'on $tan(arctan(x)) = x$? et $arctan(tan(x)) = x$?
   Démontrer que la série terme générale $u_n = arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$ converge et donner sa valeur. (calculer $tan(arctan(n+1)-arctan(n))$ en utilisant le fait que $tan(a+b) = \frac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$)
3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4x \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A est diagonalisable ssi elle possède 2 valeurs propres.
   (b) En déduire que A est diagonalisable ssi $x^2 > \frac{1}{4}$.
   (c) On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner la loi de X^2 et montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4x \end{pmatrix}$ est diagonalisable avec une probablité de $\frac{1}{2}$.
4. Dans une urne figurent N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$). Dans celle-ci, on opère des tirages successifs, avec remise, jusqu'à l'obtention d'une série de k boules consécutives identiques ($k2$). On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note T la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus.
   (a) déterminer $P(T=k)$ et $P(T=k+1)$.
   (b) Soit $n \geqslant 1$, établir
   $$P(T=n+k) = \frac{N-1}{N^k}P(T>n)$$
   (c) En déduire que la variable T admet une espérance et déterminer celle ci.
5. (BONUS) On considère $Z = \lfloor X \rfloor + 1$ où X est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. On admet que Z est une variable aléatoire. Donner la loi de Z et son espérance et sa variance.