Kholles : 19/10/21

Robin Loris

1 Exercices

1. Discuter de la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{arctan(t)}{1+t^2}\,dt \;\; et \;\; \int_e^{+\infty} cos(t)\frac{1}{tln(t)^2}\,dt \;\; et \;\; \int_0^{+\infty} \frac{ln(t)}{sin(1/t)^2}\,dt$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in$ pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - sin(t)}{t^\alpha}\,dt$$

3. (loi de Rayleigh) On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x > 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & si \quad x \geqslant 0 \end{cases}$
   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
   (b) On note X une variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X, ainsi que la médiane c'est à dire a tel que $F(a) = \dfrac{1}{2}$.
   (c) On appelle mode de X la valeur en lequel f admet un maximum. Montrer que X admet un seul mode noté M_0.
   (d) On considère $Y = X^2$. On admet que c'est une VA. Donner la loi de Y, sa médiane, son mode et son espérance.
4. Pour tout entier n non nul, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$.
   (a) Montrer que, quelque soit l'entier naturel n non nul, I_n converge.
   (b) Donner une relation de récurrence sur (I_n) et en déduire une valeur pour I_n en fonction de N.
5. (Bonus) On considère une fonction positive et continue définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = l \in]0;1[$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.