Kholle B : 30/11/2021

Robin Loris

1 Exercices

1. Donner la loi de la valeur absolue X et Y dexu VA de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite (X_n) de variables aléatoires, deux à deux indépendantes, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
   (a) Pour tout $n \neq 0$, on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$. En admettant la formule $\sum_{k=m_1}^{m_2} \binom{k}{m_1} = \binom{m_2+1}{m_1+1}$ avec $m_1 \leqslant m_2$, montrer par récurrence sur n que la loi de S_n est donné par : $\forall k \in [[n;+\infty[[$, $P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p(1-p)^{k-n}$.
   (b) Pour tout entier naturel $n \neq 0$, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer que $E(S_n) = \dfrac{n}{p}$ et $V(S_n) = \dfrac{n(1-p)}{p^2}$
   (c) que peut on dire sans calcul de la valeur de $\sum_{k=n}^{+\infty} p(S_n = kp$?
   (d) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$ et pour tout entier naturel $n \neq 0$:
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$
   (e) On se propose de trouver directement la loi de S_n. Pour ce faire, onconsidère que, lors d'une suite infinie d'épreuves indépendantes donnant un succès avec la probabilité p et un échec avec une proba $1-p$, la variable aléatoire X_1 peut être considérée comme le temps d'attente du premier succès et pour tout entier $k \geqslant 2$, chaque variable X_k peut être considérée comme le temps d'attente entre le $(k-1)$ène et le $k$ène succès.
   Pour tout $k \neq 0$, on désigne par N_k la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors des k premières épreuves.
      i. Que représente alors la varaible S_n ?
      ii. Pour tout k de $S_n(\Omega)$, écrire l'événement $(S_n = k)$ à l'aide de la variable aléatoire N_{k-1} et de l'événement A_k : "on obteitn un succès à la $k$ème épreuve".
      iii. En déduire la loi de S_n.
3. (BONUS) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $E[X(x-1)...(X-r+1)]$