Kholle A : 07/12/2021

Robin Loris

1 Exercices

1. Soit (X,Y) un couple de V.A. suivant une loi uniforme sur $\{0,...,n\}^2$. Donner la loi de X et de Y ainsi que la loi de $X+Y$.
2. Soit X,Y deux VA suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Donner la loi de $X+Y$.

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $Z_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} X_k$ et $U_n = \frac{1}{2^n} Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$.

2.a) Déterminer les lois respectives de Z_1 et Z_2.

b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $Z_{n+1} = 2Z_n + X_{n+1}$. En déduire par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire Z_n suit la loi uniforme sur $[\![0, 2^n - 1]\!]$.

3.a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, la série de terme général $\frac{X_k(\omega)}{2^k}$ converge.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $U(\omega) = \lim_{n\to+\infty} U_n(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} Z_n(\omega)$ et $U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{2^k}$.

On admet que U est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^n}$, puis $0 \leqslant U_n(\omega) \leqslant U(\omega) \leqslant U_n(\omega) + \frac{1}{2^n} \leqslant 1$.

c) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $\left[U_n + \frac{1}{2^n} \leqslant x\right] \subset [U \leqslant x] \subset [U_n \leqslant x]$.

d) En déduire que U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers U.

3.

(BONUS) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer

$$E[X(x-1)...(X-r+1)]$$