

Kholles MP 16/11/2021

1 Questions de cours

Donner tous les sous groupes additifs de \mathbb{Z} .
Décrire $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ où $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

2 Exercices arcs paramétrés

1. On considère la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x &= t - \sin(t) \\ y &= 1 - \cos(t) \end{cases}$$

- Donner l'ensemble de définition et le réduire au maximum pour l'étude.
- Étudier les variations.
- Donner $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)}$
- Tracer la courbe.

3 Exercices algèbre des groupes, anneaux et corps

1. On considère l'anneau

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \text{ impair} \right\}$$

Montrer que A est un sous anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et donner ses éléments inversibles.

2. Soit \mathbb{K} un corps fini. Calculer $\prod_{x \in \mathbb{K}^*} x$

3. On considère un sous anneau A d'un corps \mathbb{K} tel que, $\forall x \in \mathbb{K}, x \in A$ ou $x^{-1} \in A$. On considère ensuite I l'ensemble des éléments non inversibles de A .

Montrer que I est un idéal et que tout idéal de A est inclus dans I (sauf A).

4. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . On définit $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ forme un groupe et déterminer son élément neutre ainsi que le symétrique de A quelque soit A .

5. Soit n un entier naturel non nul, et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$.

On note $t_i = (1 \ i) \in S_n$. Pour $s \in S_n$, on définit $u_s(e_i) = e_{s(i)}$.

- Montrer que (t_2, \dots, t_n) engendre S_n .
 - Interpréter u_s quand s est une transposition.
 - Soit $s = (1 \ 2 \ \dots \ n)$. On suppose que s est la composée de p transpositions. montrer que $p \geq n - 1$.
 - Quel est le cardinal minimal d'une famille de transpositions génératrice de S_n ?
6. Bonus : Montrer que $a^{2^{n-2}} \equiv 1[2^n]$ pour a impair. Est ce que le groupe $(\mathbb{Z}/(2^n)\mathbb{Z})^*$ est cyclique ?
7. bonus : Que dire d'une suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de \mathbb{Z} ? Et de $\mathbb{K}[X]$?

4 Exercices intégrations

1. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \frac{\pi}{4}$$

En déduire

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$$

2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer

$$I_n = \int_0^\pi x \cos(nx) dx$$

3. Calculer pour $a, b > 0$:

$$\int \frac{1}{a \cos(\theta)^2 + b \sin(\theta)^2} d\theta$$

4. Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx$$