Kholles A 17/12/2020

1 Exercices

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (a) $dim(E)$ est paire.
   (b) Il existe $f \in L(E)$ telle que $Ker(f) = Im(f)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $i \in [[0;n]]$, on note $F_i = \{P \in E | \forall j \in [[0;n]] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$. Montrer que les F_i sont en somme directe dans E pour $i \in [[0;n]]$
3. Soient F, G, F', G' des sous espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Montrer que :
$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$$
4. (BONUS)
   (a) Soit f et g 2 applications d'un espace vectoriel E de dimension finie vers un espace vectoriel F de dimension finie. Montrer que :
$$|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f + g) \leqslant rg(f) + rg(g)$$
   (b) Soient H_1 et H_2 2 sous espaces vectoriels supplémentaires de $L(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété :
$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2,\ f \circ g + g \circ f = 0$$
      i. Montrer qu'il existe $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tels que $p_1 + p_2 = id$.
      ii. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
      iii. Montrer que $dim(H_1) \leqslant (n - rg(p_2))^2$ et que $dim(H_2) \leqslant (n - rg(p_1))^2$.
      iv. Quels sont les seuls choix possibles pour H_1 et H_2 ?