Kholles : 31/01/22

30 janvier 2022

1 Exercices

1. Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Justifier, en introduisant la famille $(a^{p(2q-1)})_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ que :
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1-a^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}$$
2. Justifier que tout entier peut s'écrire de manière unique sous la forme $p = 2^n(2k+1)$ avec $n, p \in \mathbb{N}$.
Faire la convergence et le calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
3. Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p+q=1$). On opère à des tirages successifs avec remise.
   (a) Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?
   (b) Quelle est la probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?
4. (a) On considère 2 entiers naturels $n \geqslant p$. Dénombrer le nombre d'application strictement croissante de $[[1;p]]$ vers $[[1;n]]$.
   (b) Soient n et p 2 entiers naturels non nul. A toute application de $[[1;p]]$ dans $[[1;n]]$, on associe $f' = \phi(f)$ définie de $[[1;p]]$ dans $[[1;n+p-1]]$ par :
$$\forall k \in [[1;p]]\ f'(k) = f(k) + k - 1$$
   Montrer que ϕ réalise une bijection de l'ensemble des applications strictement croissantes de $[[1;p]]$ vers $[[1;n+p-1]]$ vers l'ensemble des applications croissantes de $[[1;p]]$ vers $[[1;n]]$.
   En déduire le nombre d'applications croissantes de $[[1;p]]$ vers $[[1;n]]$.
5. On considère un ensemble E à n éléments. Démonbrer le nombre de couples de parties de E dont l'intersection est réduite à un élément.
6. (BONUS) On considère un polygone convexe à n côtés. On dispose de $c \geqslant 2$ couleurs différentes et on désire colorier le polygone, de façon à ce que chaque côte contigu soit de couleur différentes. On note $N_c(n)$ le nombre de façon de procéder. Trouver pour $n \geqslant 2$ $N_c(n)$. On pourra montrer que pour $n \geqslant 4$, $N_c(n) = (c-1)N_c(n-1) + (c-2)N_c(n-2)$.