Kholles MP 09/11/2021

1 Questions de cours

Donner, en démontrant, les élément inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Montrer que $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est une corps ssi n est premier.

2 Exercices

1. On considère
$$\mathbb{Z}[i] = \{a+ib|(a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$
Montrer que c'est un anneau pour les lois usuelles.
Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, on pose $N(z) = |z|^2$. Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[i]$, $N(zz') = N(z)N(z')$ et que $N(z) \in \mathbb{N}$.
En déduire les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.
2. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x & \equiv & 2[10] \\ x & \equiv & 3[13] \end{cases}$$
3. On considère un anneau commutatif A et on appelle un idéal premier de A tout idéal I de A tel que $\forall x, y \in \mathbb{A}$, $xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I$.
Donner un exemple d'idéal premier de $\mathbb{Z}$.
Soit P un polynôme irréductibile de $\mathbb{K}[X]$, montrer que $P.\mathbb{K}[X]$ est un idéal premier.
Soit J, K 2 idéaux de A et I un idéal premier. Montrer que
$$J \cap K = I \Rightarrow I = J \text{ ou } I = K$$
Que dire d'un anneau où tous les idéaux sont premiers.
4. 2 exercices sur les groupes :
   (a) Montrer que l'ensemble suivant est un sous groupe de $(\mathbb{R}_+^*, x)$
$$G = \{x + \sqrt{3}y | x \in \mathbb{N}\ ,\ y \in \mathbb{Z}\ ,\ x^2 - 3y^2 = 1\}$$
   (b) Soit G un groupe, H un sous-groupe de G et A une partie de G non vide. Montrer que $AH = H$ si et seulement si $A \subset H$.
5. Bonus : Montrer que $a^{2^{n-2}} \equiv 1[2^n]$ pour a impair. Est ce que le groupe $(\mathbb{Z}/(2^n)\mathbb{Z})^*$ est cyclique ?
6. Bonus : Que dire d'une suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de $\mathbb{Z}$? Et de $\mathbb{K}[X]$?