Kholle A : 16/11/2021

Robin Loris

1 Questions de cours

Donner la densité, la fonction de répartition, l'espérance, la variance et un contexte d'usage de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Donner la définition de X admet une espérance. Donner le th. de Koing-Huygens.

2 Exercices

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} |x| & si \quad x \in [-1;1] \\ 0 & sinon \end{cases}$
   Montrer que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X de densité f.
2. (a) Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$ converge et déterminer sa valeur notée α.
   (b) On considère la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha 3^t} & si \quad t \geqslant 2 \\ 0 & si \quad t < 2 \end{cases}$. Montrer que g est une densité de probabilité. on considèra une variable aléatoire Y de densité g.
   (c) Montrer que y possède une espérance et la calculer.
   (d) On considère Z la partie entière de Y : déterminer la loi de Z.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tels que $tan(x)$ et $cotan(x)$ existe. Montrer que
   $$tan(x) = cotan(x) - 2cotan(x)$$
   Démontrer alors la convergence et la valeur de la série de terme général :
   $$u_n = \frac{1}{2^n} tan(\frac{1}{2^n} . \frac{\pi}{4})$$
4. (loi de Rayleigh) On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x > 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & si \quad x \geqslant 0 \end{cases}$
   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
   (b) On note X une variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition F de X, ainsi que la médiane c'est à dire a tel que $F(a) = \frac{1}{2}$.
   (c) On appelle mode de X la valeur en lequel f admet un maximum. Montrer que X admet un seul mode noté M_0.
   (d) On considère $Y = X^2$. On admet que c'est une VA. Donner la loi de Y, sa médiane, son mode et son espérance.
5. (BONUS) On considère $Z = \lfloor X \rfloor + 1$ où X est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. On admet que Z est une variable aléatoire. Donner la loi de Z et son espérance et sa variance.