

Kholles A : 19/10/21

Robin Loris

1 Exercices

1. Discuter de la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}, \text{ et } \int_e^{+\infty} \frac{\cos(t)}{e^t} dt$$

2. Donner la nature et la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt \text{ et } \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

3. (a) Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$ converge et déterminer sa valeur notée α .

(b) On considère la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{si } t < 2 \end{cases}$. Montrer que g est une densité de probabilité.
on considèra une variable aléatoire Y de densité g .

(c) Montrer que y possède une espérance et la calculer.

(d) On considère Z la partie entière de Y : déterminer la loi de Z .

4. Déterminer la nature de

$$\int_0^1 \ln(t^2 + \sin(t)) dt$$

5. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

6. Soit f une fonction continue définie sur $[0; +\infty[$ telle que f et f'' soient intégrables. Montrer que $f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $f \cdot f'$ est intégrable.

7. (Bonus) On considère une fonction positive et continue définie sur \mathbb{R}_+ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l \in]0; 1[$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.