

Kholle A : 30/11/2021

Robin Loris

1 Exercices

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Question de cours : convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $Z_n = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} X_k$ et $U_n = \frac{1}{2^n} Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$.

2.a) Déterminer les lois respectives de Z_1 et Z_2 .

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $Z_{n+1} = 2Z_n + X_{n+1}$. En déduire par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire Z_n suit la loi uniforme sur $[[0, 2^n - 1]]$.

3.a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, la série de terme général $\frac{X_k(\omega)}{2^k}$ converge.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $U(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} Z_n(\omega)$ et $U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{2^k}$.

On admet que U est une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

b) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}$, puis $0 \leq U_n(\omega) \leq U(\omega) \leq U_n(\omega) + \frac{1}{2^n} \leq 1$.

c) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $\left[U_n + \frac{1}{2^n} \leq x\right] \subset [U \leq x] \subset [U_n \leq x]$.

d) En déduire que U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers U .

(BONUS) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer

$$E[X(x-1)\dots(X-r+1)]$$