Kholles MP 16/11/2021

1 Questions de cours

Donner, en démontrant, les élément inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Montrer que $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est une corps ssi n est premier.

2 Exercices courbes paramétrées

1. On considère la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x &= cos^3(t) \\ y &= sin^3(t) \end{cases}$$

   (a) Donner l'ensemble de définition et le réduire au maximum pour l'étude.
   (b) Étudier les variations.
   (c) Donner $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$
   (d) Tracer la courbe.
   (e) On note A et B les points d'intersection de (O_x) et (O_y) avec tangente au point de paramètre $t \neq 0[\dfrac{\pi}{2}]$ de la courbe. Calculer la distance $A(t)B(t)$.

3 Exercices algèbre des groupes, anneaux et corps

1. On considère

$$\mathbb{Z}[i] = \{a+ib|(a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

   Montrer que c'est un anneau pour les lois usuelles.
   Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, on pose $N(z) = |z|^2$. Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[i]$, $N(zz') = N(z)N(z')$ et que $N(z) \in \mathbb{N}$.
   En déduire les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x &\equiv 2[10] \\ x &\equiv 3[13] \end{cases}$$

3. On considère un anneau commutatif A et on appelle un idéal premier de A tout idéal I de A tel que $\forall x, y \in \mathbb{A}$, $xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ } ou \text{ } y \in I$.
   Donner un exemple d'idéal premier de $\mathbb{Z}$.
   Soit P un polynôme irréductibile de $\mathbb{K}[X]$, montrer que $P.\mathbb{K}[X]$ est un idéal premier.
   Soit J, K 2 idéaux de A et I un idéal premier. Montrer que

$$J \cap K = I \Rightarrow I = J \text{ } ou \text{ } I = K$$

   Que dire d'un anneau où tous les idéaux sont premiers.

4. 2 exercices sur les groupes :
   (a) Montrer que l'ensemble suivant est un sous groupe de $(\mathbb{R}_+^*, x)$

$$G = \{x+\sqrt{3}y | x \in \mathbb{N} \text{ , } y \in \mathbb{Z} \text{ , } x^2 - 3y^2 = 1\}$$

(b) Soit G un groupe, H un sous-groupe de G et A une partie de G non vide. Montrer que $AH = H$ si et seulement si $A \subset H$.

5. Bonus : Montrer que $a^{2^{n-2}} \equiv 1[2^n]$ pour a impair. Est ce que le groupe $(\mathbb{Z}/(2^n)\mathbb{Z})^*$ est cyclique ?
6. Bonus : Que dire d'une suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de $\mathbb{Z}$? Et de $\mathbb{K}[X]$?

4 Exercices intégrations

1. Calculer les intégrales suivantes :
   (a)
   $$\int_0^{2\pi} cos^2(t)dt$$
   (b)
   $$\int_1^2 ln(t)dt$$
   (c)
   $$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$$
2. Calculer les intégrales suivantes :
   (a)
   $$\int_1^e \frac{1}{t+t(ln(t))^2}\,dt$$
   (b)
   $$\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{ln(t)+1}}\,dt$$
   (c)
   $$\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}\,dx$$
3. Soit α, β, b, c des réels avec $\beta \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$.
   Calculer
   $$\int \frac{bx+c}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p}\,dx$$