Kholles 17/12/2020

1 Exercices

1. Soit E l'ensemble des applications $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ continues telles que les restrictions de f sur $[-1;0]$ et f sur $[0;1]$ soient affines.
   (a) Montrer que E est $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Donner une base de E.
2. Soit $e = (e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que
$$\forall f \in E^*, f(e_1) = ... = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0$$
   Montrer que e est une base de E.
3. Soient $E_1, ..., E_n$ et $F_1, ..., F_n$ sous espaces vectoriels de E tel que $E_i \subset F_i$ et
$$\oplus_{i=1}^n E_i = \oplus_{i=1}^n F_i$$
   Montrer que $E_i = F_i$.
4. (BONUS)
   (a) Soit f et g 2 applications d'un espace vectoriel E de dimension finie vers un espace vectoriel F de dimension finie. Montrer que :
$$|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$$
   (b) Soient H_1 et H_2 2 sous espaces vectoriels supplémentaires de $L(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété :
$$\forall (f,g) \in H_1 \times H_2,\ f \circ g + g \circ f = 0$$
      i. Montrer qu'il existe $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tels que $p_1 + p_2 = id$.
      ii. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
      iii. Montrer que $dim(H_1) \leqslant (n - rg(p_2))^2$ et que $dim(H_2) \leqslant (n - rg(p_1))^2$.
      iv. Quels sont les seuls choix possibles pour H_1 et H_2 ?