Kholles 07/03/2022

1 Questions de cours

Discuter de la dérivabilité d'une série entière, en justifiant.

2 Exercices

1. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :
   (a) $\sum\limits_{n\geqslant 0} n!z^n$
   (b) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$
   (c) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n$
   (d) $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}) z^n$
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} d(n)z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} s(n)z^n$ dans le cas où $d(n)$ est le nombre de diviseur de n et $s(n)$ la somme de ceux ci.
3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de Rdc R. Donner celui de $\sum a_n z^{2n}$.
   Si $R \neq 0$, faire de même pour $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$
4. Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} ln(n)x^n$$
   converge. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
   (a) Détermner I.
   (b) On pose
   $$a_1 = -1 \textit{ et } a_n = -ln(1-\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \textit{ pour } n \geqslant 2$$
   Déterminer le domaine de définition de :
   $$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$
   (c) Trouver une relation entre f et g.
   (d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$
   (e) Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to -1^+$
5. (BONUS) Soit (a_n) une suite de réels stric positifs. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose que $S_n \to +\infty$ et $\frac{a_n}{S_n} \to 0$.
   Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.