Kholles 28/09/2021

1 Exercices

1. Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   (a) Vérifier que $X^3 + X^2 - 2X$ est annulateur de A.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.
   (c) Diagonaliser A.
2. HEC 2015, oral principal :

   1. Question de cours : Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

   Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On suppose l'existence d'un réel k tel que ${}^tA\,A + A\,{}^tA = k\,I$.

   2. On pose : $S = {}^tA\,A + A\,{}^tA$, et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = {}^tXSX$.
   Étudier le signe de $q(X)$ et en déduire que $k \geqslant 0$.

   3. On suppose que $k = 0$. Montrer que $A = 0$.

   On suppose dorénavant que $k > 0$.

   4. Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ ayant pour matrices respectives, A et ${}^tA$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   Établir la relation : $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$.

   5. On pose : $B = {}^tA\,A$. Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé.
   a) Montrer que $\lambda \geqslant 0$.
   b) Montrer que X est un vecteur propre de la matrice $A\,{}^tA$ pour une valeur propre μ que l'on précisera.
   En déduire que $\lambda \in [0, k]$.
   c) On suppose dans cette question que $\lambda \in]0, k[$. Montrer que les vecteurs AX et ${}^tAX$ sont des vecteurs propres de B pour la valeur propre μ.
   d) On se place dans la situation de la question c). On note E_λ et E_μ les sous-espaces propres de la matrice B pour les valeurs propres λ et μ respectivement. On note φ l'application de E_λ dans E_μ définie par $\varphi(X) = AX$.
   Montrer que l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Que peut-on dire si $\lambda = 0$ ou $\lambda = k$?

3. (bonus) : Soit $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i;j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui vérifier $\forall i \in [[1, n]]$, $|a_{i,i} > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$.
   Montrer que A est inversible.